

# 社会経済学2 (2013年度後期)

## 第3回: 内生的成長モデル

担当者: 佐々木 啓明\*



---

\*E-mail: [sasaki@econ.kyoto-u.ac.jp](mailto:sasaki@econ.kyoto-u.ac.jp); URL: <http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~sasaki/>

## ——はじめに——

新古典派成長モデルでは, 長期における1人当たり成長率は技術進歩率に等しくなった.

しかし, その技術進歩率自体はモデルの外から与えられていた.

ここでは, 技術進歩が研究開発 (R&D) への投資により生じるモデルを説明する.

1. 経済には最終財生産部門と知識生産部門が存在する.
2. 最終財の生産には資本ストックと労働が投入され, 知識の生産には労働が投入される.
3. それら以外はほとんど新古典派成長モデルと同じ.

## ——生産関数——

最終財部門の生産関数.

$$Y = K^\alpha (AL_Y)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

$Y$ : 最終財の産出量,  $K$ : 資本ストック,  $A$ : 知識水準,  $L_Y$ : 最終財部門の雇用量.

総人口の動学方程式.

$$\dot{L} = nL, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

資本ストックの動学方程式.

$$\dot{K} = sY - \delta K. \quad (3)$$

## ——R&D 部門——

R&D 部門では, 労働と現行の知識を用いて新たな知識が生産される.

$$\dot{A} = \gamma L_A A^\phi, \quad \gamma > 0. \quad (4)$$

$\dot{A}$ : 知識のフロー,  $L_A$ : R&D 部門の雇用量.

$\phi > 0$ : 知識の蓄積が新たな知識の生産を容易にする (肩車効果).

$\phi < 0$ : 知識の蓄積が新たな知識の生産を困難にする (フィッシング・アウト効果).

$\phi = 0$ : 知識の蓄積が新たな知識の生産と無関係.

以下では,  $\phi > 0$  を仮定する.

## ——Romer モデル ( $\phi = 1, n = 0$ )——

Romer, P. M. (1990) “Endogenous Technological Change,” *Journal of Political Economy* 98 (5), pp. 71–102.

総労働のうち R&D 部門で雇用される割合を  $\sigma$  とする.

$$L_A = \sigma L, \quad L_Y = (1 - \sigma)L, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (5)$$

均斉成長経路 (BGP) では, 資本ストックの成長率が一定となる. まず,

$$\frac{\dot{K}}{K} = s \frac{Y}{K} - \delta. \quad (6)$$

これが一定となるためには,  $Y$  と  $K$  が同率で成長する必要がある.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}_Y}{L_Y} \right) = \frac{\dot{K}}{K}. \quad (7)$$

以上より,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \gamma\sigma L. \quad (8)$$

BGPにおける1人当たり所得成長率 ( $g_y = \dot{y}/y$ ).

$$g_y = \gamma\sigma L. \quad (9)$$

これより,

$$\sigma \uparrow \implies g_y \uparrow,$$

$$L \uparrow \implies g_y \uparrow.$$

規模効果 (Scale Effects) が存在する.

## ——Jones モデル ( $0 < \phi < 1, n > 0$ )——

Jones, C. I. (1995a) “R&D-Based Models of Economic Growth,” *Journal of Political Economy* 103, pp. 759–784.

Jones, C. I. (1995b) “Time Series Tests of Endogenous Growth Models,” *Quarterly Journal of Economics* 110, pp. 495–525.

1. Romer モデルでは, R&D に従事する人数が一定であっても, 1 人当たり所得は持続的に成長する.
2. 現実には, R&D に従事する人数は増えている. しかし, 成長率は急激に上昇していない.
3. R&D の定式化が不適切では?



知識の成長率.

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma\sigma LA^{\phi-1}. \quad (10)$$

これが一定となることから,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{1-\phi}. \quad (11)$$

BGPにおける  $Y$  と  $K$  の成長率.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = n + \frac{n}{1 - \phi}. \quad (12)$$

BGPにおける 1 人当たり所得成長率.

$$g_y = \frac{n}{1 - \phi}. \quad (13)$$

これより,

$$n \uparrow \implies g_y \uparrow. \quad (14)$$

規模効果を取り除かれる.

## Jones モデルの安定性

Solow モデルの定常状態は安定であった。Jones モデルではどうか？

Solow モデルで効率労働単位の資本ストックを導入したことを思い出そう。

Jones モデルでも, Solow モデルにおける効率労働単位の資本ストックのように, 定常状態において一定となるような変数を導入すれば, 安定性を分析できる。

次のような新しい状態変数を導入する。

$$a = \frac{A}{L^{\frac{1}{1-\phi}}}, \quad k = \frac{K}{L^{\frac{2-\phi}{1-\phi}}}. \quad (15)$$

$a$  と  $k$  を微分することで, 以下のような  $a$  と  $k$  に関する微分方程式を得る.

$$\dot{a} = a \left( \gamma \sigma a^{\phi-1} - \frac{n}{1-\phi} \right), \quad (16)$$

$$\dot{k} = k \left[ s(1-\sigma)^{1-\alpha} a^{1-\alpha} k^{\alpha-1} - \delta - \frac{2-\phi}{1-\phi} n \right]. \quad (17)$$

ここで, この連立微分方程式に対応するヤコビ行列  $\mathbf{J}$  を考える.

連立微分方程式の定常状態が安定となるための必要十分条件は, ヤコビ行列の対角要素の和  $\text{tr } \mathbf{J}$  が負となり, かつ行列式  $\det \mathbf{J}$  が正となること.

実際にこれらを計算してみると,  $\text{tr } \mathbf{J} < 0$  かつ  $\det \mathbf{J} > 0$  が成立していることが確認できる.

つまり, Jones モデルの定常状態は安定である.