社会経済学2 (2015年度後期)

第5回: カルドア・モデル

担当者: 佐々木 啓明*

*E-mail: sasaki@econ.kyoto-u.ac.jp; URL: http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~sasaki/

——はじめに——

これまで取り上げた新古典派成長モデル, 内生的成長モデル, ハロッド・モデル, これらはすべて均衡動学モデルであった.
→ 財市場はつねに均衡し, 総生産と総需要はつねに等しい.

カルドアは不均衡動学モデルを開発した.
→ 財市場が超過需要ならば生産が増え, 超過供給ならば生産が減る.
→ 財市場における数量調整. 価格調整は考えない.

ソロー・モデルは安定, ハロッド・モデルは不安定.
現実は安定と不安定の中間. 産出は循環的変動を示す.

Kaldor, N. (1940) “A Model of the Trade Cycle,” *Economic Journal* 50, pp. 78–92.

Chang, W. and Smyth, D. (1971) “The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor’s 1940 Model Re-examined,” *Review of Economic Studies* 38, pp. 37–44.

——非線形の投資関数——

カルドアは利潤原理に基づく非線形の投資関数を仮定した.

$$\dot{K} = I = I(\Pi, K), \quad I_{\Pi} > 0,\ I_K < 0. \tag{1}$$

Π: 実質利潤, K: 資本ストック.

分配率がほぼ一定と考えられるから, Π は Y の増加関数.

$$\dot{K} = I(Y, K), \quad I_Y > 0,\ I_K < 0. \tag{2}$$

さらに, 投資関数は Y についてＳ字型であると仮定する(非線形性).

——線形の貯蓄関数——

貯蓄Sは所得から消費Cを引いたものなので, まずは消費関数を定式化する.

$$C = cY + c_0, \quad 0 < c < 1, \; c_0. \tag{3}$$

c: 消費性向, c_0: 独立消費.

これより貯蓄は,

$$S = Y - C = (1 - c)Y - c_0 = sY - c_0, \quad s = 1 - c. \tag{4}$$

s: 貯蓄性向.

——産出と資本ストックの動学方程式——

Y と K の動学方程式は,

$$\dot{Y} = \alpha \cdot (I - S) = \alpha[I(Y, K) - sY + c_0], \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

$$\dot{K} = I(Y, K). \tag{6}$$

α: 財市場の調整速度.

これらは Y と K に関する非線形連立微分方程式を表している.

定常状態は $\dot{Y} = \dot{K} = 0$ となる状態.

定常状態にいたる過程は位相図を用いて分析する.

——位相図による分析——

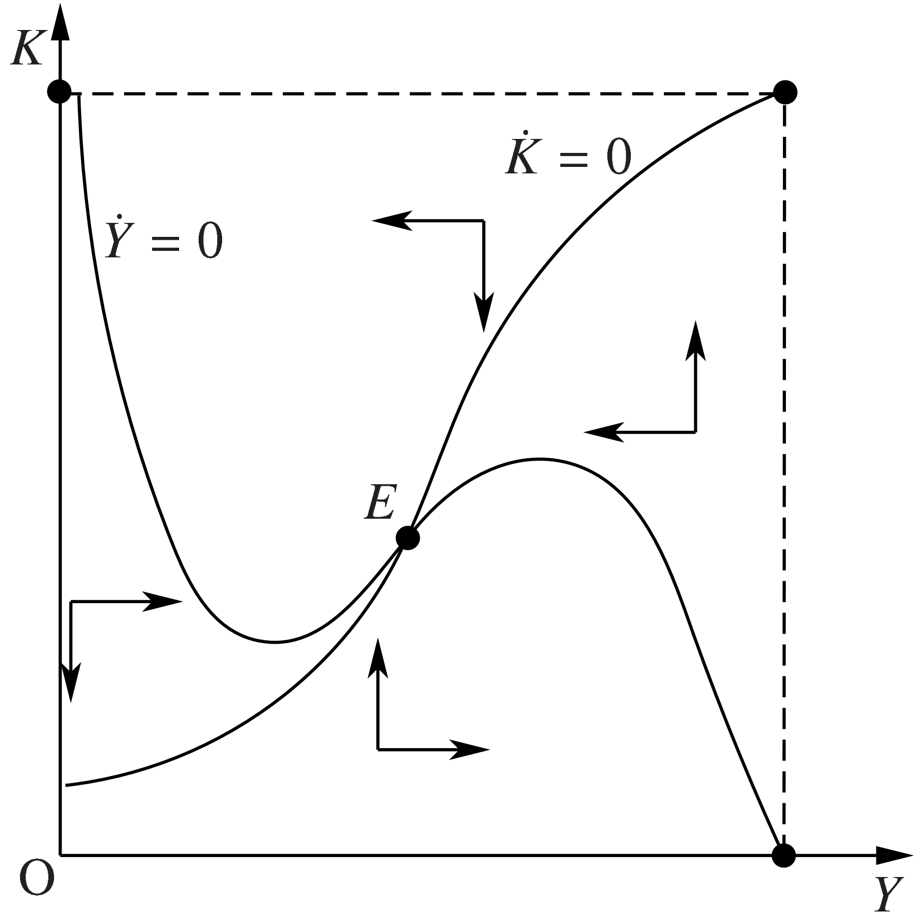


Figure 1: カルドア・モデルの位相図

——永続的な景気循環の発生——

均衡点 E で求心力が働けば, ある初期値から出発した経済は均衡点に収束する.

均衡点 E で遠心力が働けば, リミット・サイクル(極限閉軌道)が存在し, 経済はそれに収束する(ポアンカレ・ベンディクソンの定理).

リミット・サイクルに乗れば, Y と K の組み合わせは, 永遠に反時計回りに回り続ける.
$\rightarrow$ 永続的な景気循環が発生する.

——遠心力が発生する条件——

ヤコビ行列を$\mathbf{J}$とすれば,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - s) & \alpha I_K \\ I_Y & I_K \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\det \mathbf{J} = -\alpha s I_K > 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{J} = \alpha(I_Y - s) + I_K. \tag{9}$$

均衡が局所的に安定となる必要十分条件は, $\det \mathbf{J} > 0$かつ$\operatorname{tr} \mathbf{J} < 0$. $\det \mathbf{J} > 0$は確定だが, $\operatorname{tr} \mathbf{J} < 0$は不明.

$\alpha(I_Y - s) + I_K > 0$であれば均衡は局所的に不安定となり, 遠心力が働くから, リミット・サイクルが生じる.

ポアンカレ･ベンディクソンの定理ではなく, ホップ分岐定理を用いると, もっと簡単にリミット・サイクルが発生することを示すことができる.

均衡値の$E(Y^*, K^*)$はαに依存しないので, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J}$に登場するI_Y, I_Kはαに依存しない. そこで, αを分岐パラメーターに選ぶことを考える.

$I_Y - s > 0$, つまり, 投資の産出に対する反応が貯蓄の産出に対する反応を上回ると仮定する.

このとき, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J}$はαの増加関数となる. そして, $\bar{\alpha} = -I_K/(I_Y - s)$となる$\alpha > 0$が存在し, $\alpha < \bar{\alpha}$に対しては, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J} < 0$, $\alpha = \bar{\alpha}$に対しては, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J} = 0$, $\alpha > \bar{\alpha}$に対しては, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J} > 0$が成立する. それゆえ, $\alpha = \bar{\alpha}$はホップ分岐点である. すなわち, $\alpha = \bar{\alpha}$の近傍のある範囲において, 非定常的な周期解が存在する.

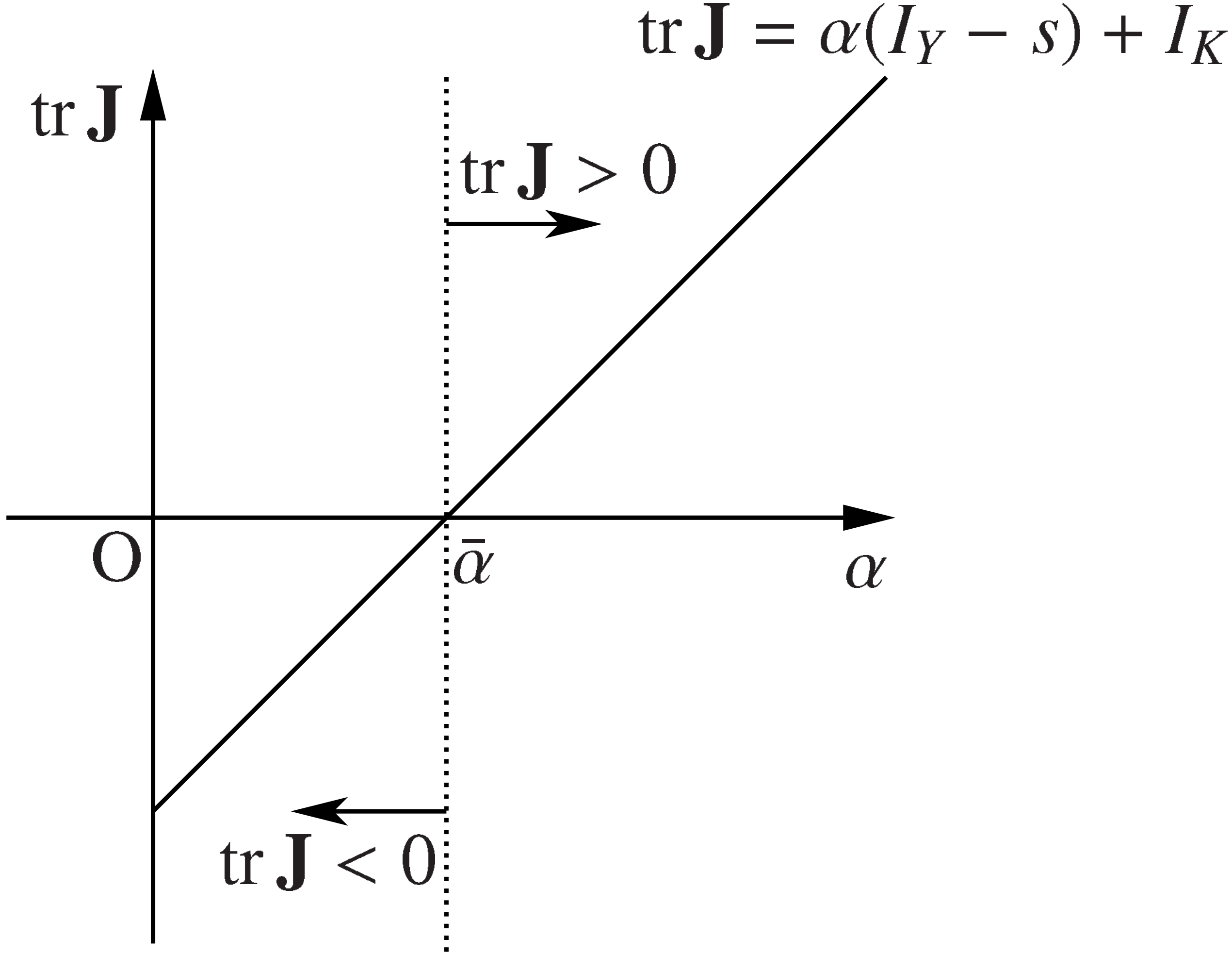


Figure 2: ホップ分岐の発生

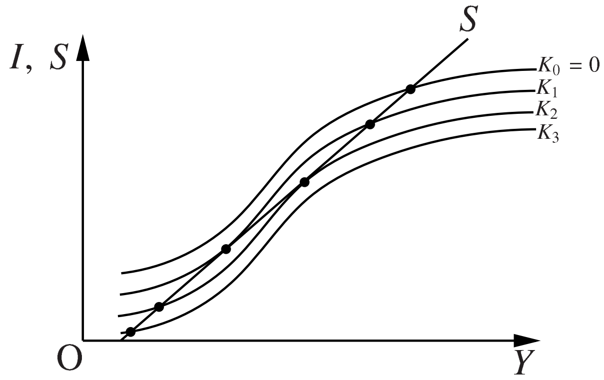
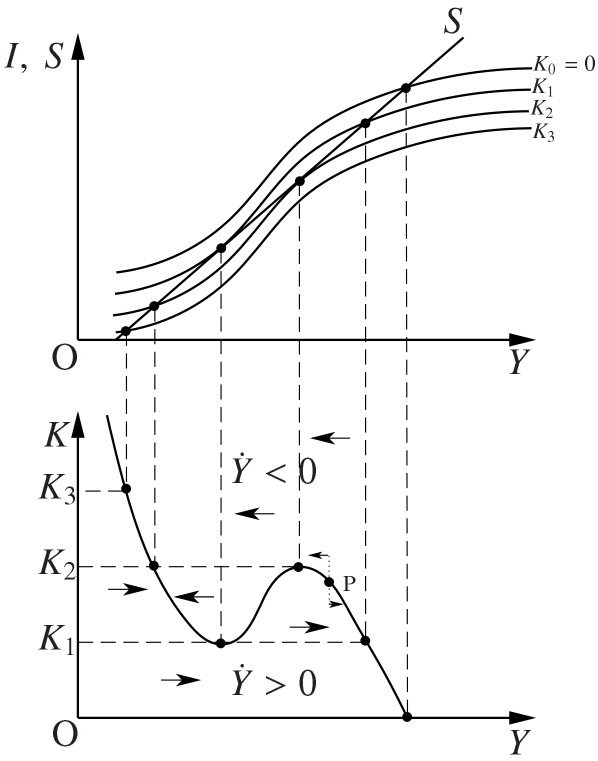
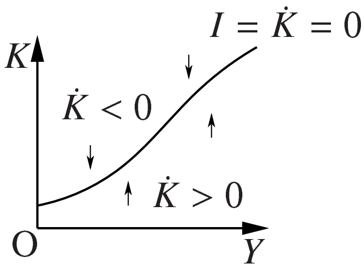


図 11.22:



$I,\ S$
S
$K_0 = 0$
K_1
K_2
K_3
O
Y
K
K_3
K_2
K_1
$\dot{Y} < 0$
P
$\dot{Y} > 0$
O
Y

図 11.23:



$I = \dot{K} = 0$
K
$\dot{K} < 0$
$\dot{K} > 0$
O
Y

図 11.24:

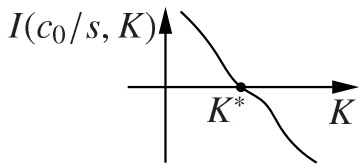


図 11.25:

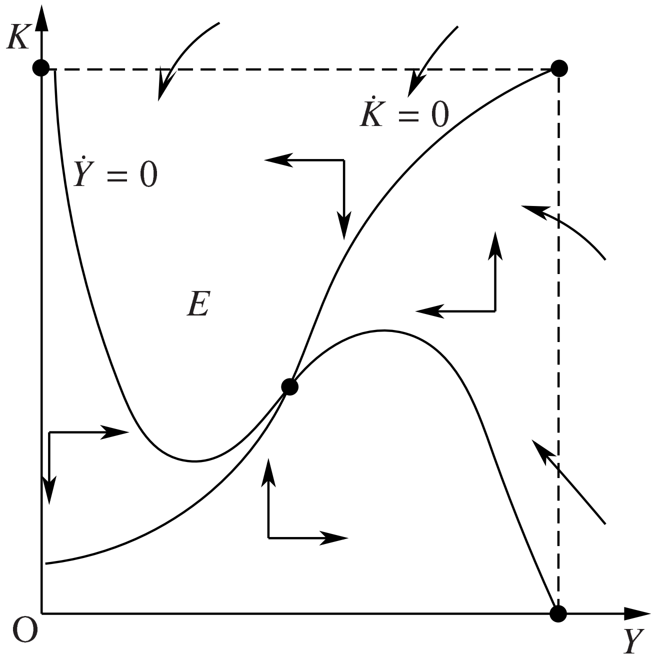


図 11.26: