経済論叢（京都大学）第175巻第2号，2005年2月

実質金利・名目金利・インフレリスクプレミアム

内　山　朋　規

I はじめに

わが国においても，2004年3月から物価連動国債が発行されるようになった。古くは英国が1981年に物価連動国債の発行を開始しているが，米国の1997年，仏国の1998年など，各国で発行されるようになったのは近年のことである。各国とも，通常の名目国債に比べれば発行量は依然として少ないものの，急速に増加している。物価連動債は新しい主要な投資対象資産として注目を集めており，その理由は，文字通り，キャッシュフローが実質ベースで固定されているためである[1]。通常の債券はキャッシュフローが名目ベースで固定されている証券であることから，名目債への投資は投資家にとってインフレリスクを負担することになる。ところが物価連動債はインフレリスクにさらされない証券であることから，特に長期投資家にとっては重要な投資対象資産となり得る。Campbell and Viceira [2002] 3章では，長期投資家にとっての安全資産は投資期間に満期が一致した長期の物価連動債であることが示され，名目長期債だけでなく，物価連動債にも投資可能である場合，効用が大きく増加し得ることが実証的に論じられている。このような観点から，市場に物価連動債が登場したことには，社会厚生上の意義がある。

1）実際の物価連動債は，物価連動係数の適用日と適用される物価指数の日付との間にタイムラグがあり，また米国などでは名目ベースでの元本保証があるなど，厳密な意味での実質債券とはいえないが，単純化のため本稿ではこのような点を無視する。また流動性プレミアムやデフォルトリスクも無視する。

ところで，名目金利は名目債券の価格から得られ，実質金利は実質債券（物価連動債）の価格から得ることができる。名目金利には，実質金利と期待インフレ率のほかにインフレリスクプレミアムが含まれていると理解されている。しかしながら，Fisher 方程式を引き合いに，名目長期金利と実質長期金利の差（ブレークイーブン・インフレ率（BEI）と呼ばれている）が期待インフレ率であるとする表現をしばしば見かけることがある。あるいは，根拠がないままリスクプレミアムをゼロとする議論を目にすることも多い。ところが，インフレ率に不確実性があれば，その対価としてリスクプレミアムが存在し，そのインフレリスクプレミアムは名目金利に含まれることになるはずである[2]。このように，実質金利と名目金利，インフレリスクプレミアムの関係がしばしば混乱されて理解されているように思われる。

金利とインフレリスクプレミアムには理論的にどのような関係があるのであろうか。実証的にみてインフレリスクプレミアムはどの程度の大きさなのであろうか。これらの点を明確にすることが本稿の目的である。本稿での議論は，ファイナンス理論の標準的な議論に基づく。その意味で，よく知られた既存の理論を本稿のテーマに適用したものに過ぎない。

本稿の構成は以下の通りである。まず，名目金利と実質金利，期待インフレ率，インフレリスクプレミアムの間の理論的な関係式を導出する。その際，スポットレート（瞬間的な短期金利）とイールド（長期金利）の違いについても注意を払う。その後，わが国の市場データを用いてインフレリスクプレミアムに関する実証を行い，併せて米英市場の実証結果について概説する。最後に，インフレリスクプレミアムの決定メカニズムに関して既存の理論をもとに簡単に述べる。

2) インフレリスクプレミアムの存在は，物価連動債の発行体にとって，資金調達コストが名目債券よりも低いという議論の根拠になることがある（Campbell and Shiller [1996]）。

II 金利とインフレリスクプレミアムの関係

1 証券価格とリスクプレミアム

ファイナンス理論では，通常，キャッシュフローに不確実性がある証券の価格には，その不確実性に応じたプレミアムが織り込まれているとされている。これを理論的に展開するために，状態価格密度を考えよう。任意の証券の実質価格過程（配当込み）x について，ξx がマルチンゲールになる正の確率過程 ξ は状態価格密度[3] と呼ばれる。状態価格密度が存在することは，市場に裁定機会が存在しないことの十分条件である（Duffie [2001]）。以後，経済の不確実性を互いに直交する d 次元標準 Brown 運動 Z により記述し，表記を容易にするために，連続時間の設定で考える。また，すべての確率過程は連続であると仮定する。このとき，よく知られているように，状態価格密度過程 ξ は以下の確率微分方程式に従う。

$$\frac{d\xi_t}{\xi_t}=-r_t dt-\theta_t dZ_t$$

ただし，$r_t \in \Re$ は実質のスポットレート（デフォルトリスクのない瞬間的な実質短期金利），$\theta_t \in \Re^{1\times d}$ は実質ベースのリスクの市場価格ベクトル（リスク 1 単位あたりの実質リスクプレミアム）である。r と θ は確率的でもよい。

適当な条件のもとで，この経済の任意の証券の配当込みの実質価格過程 x を以下の確率微分方程式で表現することができる。

$$\frac{dx_t}{x_t}=\mu_t^x dt+\sigma_t^x dZ_t$$

ただし，μ_t^x は時刻 t におけるこの証券の瞬間的な期待リターンで $\mu_t^x \geq r_t$ かつ $\mu_t^x \in \Re$，$\sigma_t^x \in \Re^{1\times d}$ で $\|\sigma_t^x\|$ はボラティリティ（リターンの瞬間的な標準偏差）である。状態価格密度の重要な性質として，任意の証券のリスクプレミアムは，

3) 確率的割引ファクターやプライシングカーネルとも呼ばれる。

状態価格密度の変化率とその証券の価格変化率の共分散により定まる。実際，ξx がマルチンゲールであることから，伊藤の補題を用いて

$$\mu_t^x = r_t + \sigma_t^x \cdot \theta_t^x \tag{1}$$

が成り立つ。右辺は，実質無リスク短期金利に対して，どの程度のリスクプレミアムが加わるのかを示している。右辺第2項の $\sigma_t^x \cdot \theta_t^x$ は，状態価格密度の変化率とその証券の価格変化率の共分散で，この証券の期待リターンに含まれるリスクプレミアムを表している。

2 スポットレートとインフレリスクプレミアム

ここで，物価（インフレ水準）過程 p は不確実とし，$m_t \in \Re$ と $\nu_t \in \Re^{1\times d}$ を用いて，その変動を以下で表すことにする。

$$\frac{dp_t}{p_t} = m_t dt + \nu_t dZ_t$$

したがって，m_t は時刻 t における瞬間的な期待インフレ率，$\|\nu_t\|$ はインフレ率のボラティリティ（インフレ率の瞬間的な標準偏差）を表す。名目スポットレート（瞬間的な名目短期金利）過程を R，名目無リスク証券の名目価格過程を B^0 とすると，$dB_t^0 = R_t B_t^0 dt$ であり，名目ベースでみた場合には名目無リスク証券にはリスクがない。この証券の実質価格は $B_t^0/p_t \equiv b_t^0$ なので，その変動は伊藤の補題から

$$\frac{db_t^0}{b_t^0} = (R_t - m_t + \nu_t \cdot \nu_t)dt - \nu_t dZ_t$$

になる。この式は，実質ベースでみた場合に，名目無リスク証券にはインフレリスクがあることを表している。さらに ξb^0 もまたマルチンゲールなので，(1)の関係から以下が成り立つ。

$$R_t = r_t + m_t - \nu_t \cdot \nu_t - \nu_t \cdot \theta_t \tag{2}$$

この式は，名目スポットレートと実質スポットレートの間の重要な関係式であ

る。名目スポットレート R_t は，実質スポットレート r_t と期待インフレ率 m_t のほかに，インフレ率の（瞬間的な）分散 $\nu_t \cdot \nu_t$ とインフレ率の不確実性に起因するリスクプレミアム $-\nu_t \cdot \theta_t$ から成り立つことがわかる。多くの投資家にとってインフレリスクは忌避されるものと考えれば，$-\nu_t \cdot \theta_t$ の符号は正であると解釈するのが自然であろう。

したがって，(2)から，名目スポットレートが実質スポットレートと期待インフレ率の和になるという Fisher 方程式は，インフレ率に不確実性があれば（つまり $\nu \neq 0$ ならば）成り立たない。Fisher 方程式を前提にした議論は，インフレ率に不確実がないことを前提にしているのと同値であり，この前提のもとでは実質債券の恩恵を議論する意味はないであろう。実証的にみて，インフレ率は実際に確率的である。

(2)から，インフレ率の不確実性に起因するプレミアムは $-\nu_t \cdot \theta_t$ であり，本稿ではこれを「狭義のインフレリスクプレミアム」と呼ぶことにする。慣例上，名目金利から実質金利と期待インフレ率を控除したものをインフレリスクプレミアムと呼ぶことが多いので，$-\nu_t \cdot \nu_t - \nu_t \cdot \theta_t$ の部分を単に「インフレリスクプレミアム」と呼ぶ。

3　イールドとインフレリスクプレミアム

1)　一般的な場合

前節では，スポットレート（瞬間的な短期金利）とインフレリスクプレミアムの関係について述べた。それでは，イールド（長期金利）とインフレリスクプレミアムの関係はどのようになるのであろうか。本稿では割引債の利回りをイールドと呼ぶことにし，名目と実質のそれぞれのイールドの関係について考える。

まず，満期を s とする実質割引債の時点 t における実質価格 $b_t^r(s)$ は，状態価格密度過程 ξ を用いて，

$$b_t^r(s)=E_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t}\right]$$

になる。したがって，時点 t における期間 $s-t$ の実質イールド $y_t(s)$ は

$$y_t(s)=-\frac{1}{s-t}\log b_t^r(s)=-\frac{1}{s-t}\log E_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t}\right] \tag{3}$$

である。一方，満期を s とする名目割引債の時点 t における名目価格 $B_t^R(s)$ は

$$B_t^R(s)=E_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t}\frac{p_t}{p_s}\right]$$

になるので，時点 t における期間 $s-t$ の名目イールド $Y_t(s)$ は

$$\begin{aligned}Y_t(s)&=-\frac{1}{s-t}\log B_t^R(s)=-\frac{1}{s-t}\log E_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t}\frac{p_t}{p_s}\right]\\&=-\frac{1}{s-t}\log\left(E_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t}\right]E_t\left[\frac{p_t}{p_s}\right]-\mathrm{cov}_t\left[\frac{\xi_s}{\xi_t},\ \frac{p_t}{p_s}\right]\right)\end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる。(4)の対数の中の共分散の項が，インフレリスクプレミアムに関係する。もしインフレ率に不確実性がなければ，この項はゼロになる。また，期待インフレ率は，(4)の対数の中の最初の項に関係している。(3)と(4)を比較すると，スポットレートの場合とは異なり，実質イールドと名目イールドの間には，期待インフレ率とインフレリスクプレミアムを通じた線型関係が一般的には成立しないことが分かる。

2)　特別な場合

インフレ率や金利の変動にパラメトリックな仮定を設ければ，名目および実質のイールドの間の関係を明示的に表現することが可能になる。そこで，定性的な解釈を得るために，ここではアフィン期間構造モデルのうち，最も単純な以下のモデルを仮定しよう。Duffie and Kan [1996] などにより導入されたアフィン期間構造モデルの仮定のもとでは，実質イールドと名目イールドの間に，期待インフレ率とインフレリスクプレミアムを通じた線型関係が成立すること

になる。

仮定　物価（インフレ水準）過程 p には幾何 Brown 運動（期待インフレ率過程 m は変動するが，ボラティリティは一定），m と実質スポットレート過程 r には平均回帰過程（いわゆる Vasicek モデル）を仮定する。すなわち，

$$
\begin{aligned}
dr_t &= \kappa(\bar{r}-r_t)dt+\sigma dZ_t \\
dm_t &= \gamma(\overline{m}-m_t)dt+\eta dZ_t \\
\frac{dp_t}{p_t} &= m_t dt+\nu dZ_t
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし $\overline{m}$ と $\bar{r}$ はスカラーの定数で，ν と η，σ は $\Re^{1\times d}$ の定数ベクトルである[4]。さらに，リスクの市場価格 $\theta\in\Re^{1\times d}$ を定数と仮定する。

この仮定のもとで，(3)と(4)から，以下の通り実質イールド $y_t(s)$ と名目イールド $Y_t(s)$ の明示的な形式を得ることができる。計算は煩雑ではあるが，その方法は標準的で，例えば木島［1999］を参照されたい。

$$
\begin{aligned}
y_t(s) &= \frac{-F_1(s-t\,;\,\theta)+F_2(s-t)r_t}{s-t} \\
Y_t(s) &= y_t(s)+\frac{-G_1(s-t\,;\,\theta)+G_2(s-t)m_t-H(s-t)-\nu\cdot\nu-\nu\cdot\theta(s-t)}{s-t}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここで $F_1(s-t\,;\,\theta)$，$F_2(s-t)$，$G_1(s-t\,;\,\theta)$，$G_2(s-t)$，$H(s-t)$ は期間 $s-t$ の確定的関数で，その形式は付録に記載した。ただし，$F_1(s-t;\theta)$，$G_1(s-t;\theta)$ には，リスクの市場価格 θ が含まれるので明示した。

また，時点 t における期間 $s-t$ の期待インフレ率 $M_t(s)$ は，

$$
M_t(s)=\frac{1}{s-t}\log\left(\frac{E_t[p_s]}{p_t}\right)=I(s-t,\,m_t) \tag{7}
$$

4)　標準 Brown 運動は多次元なので，物価（インフレ水準），期待インフレ，実質スポットレートが完全に相関していることを前提にしているわけではない。

として計算できる。$I(s-t, m_t)$ は期間 $s-t$ と m_t の確定的関数で，その形式も付録に記載した。(6)と(7)から，

$$Y_t(s)=y_t(s)+M_t(s)$$

$$+\frac{1}{s-t}\left(\frac{2\eta\cdot\nu}{\gamma}(G_2(s-t)-s+t)+\frac{\eta\cdot\theta}{\gamma}(G_2(s-t)-s+t)\right. \quad (8)$$

$$\left.-H(s-t)-\nu\cdot\nu(s-t)-\nu\cdot\theta(s-t)\right)$$

を得る。(8)の右辺第3項がインフレリスクプレミアムに相当し，実質イールドと名目イールドの間に，期待インフレ率とインフレリスクプレミアムを通じた線型関係が成立する。狭義のインフレリスクプレミアムは，期待インフレ率の不確実性の大きさ η と期待外インフレ率の不確実性の大きさ ν からもたらされ，残りのインフレリスクプレミアムは，実質金利と期待外インフレ率と期待インフレ率のそれぞれの共分散と，期待外インフレ率の分散に依存していることが分かる。このように単純なモデルを仮定したとしても，スポットレート（短期金利）の場合とは異なり，実質イールド（実質長期金利）と名目イールド（名目長期金利）との間の関係は複雑になる。

III インフレリスクプレミアムの実証分析

ここまでの議論では，インフレ率に不確実性がある場合，

名目金利＝実質金利＋期待インフレ率

＋インフレリスクプレミアム

という関係が理論的にどのように成立するのかについて考察してきた。スポットレート（短期金利）での関係は(2)である。イールド（長期金利）では一般的には線型関係は得られないが，アフィンモデルを前提にすれば(8)のように線型関係が成立する。

それでは実証的にみて，インフレリスクプレミアムはどの程度の大きさなのであろうか。また，期間や時期によってインフレリスクプレミアムの大きさは

異なるのであろうか。あるいは，実質金利の期間構造の形状や変動の特性は，名目金利とは異なるのであろうか。

1　わが国の市場データを用いた実証

まず，わが国の市場データを用いて，インフレリスクプレミアムに関する実証を行う。わが国では，物価連動国債が2004年3月に発行が開始されたため，推定に十分な実質金利を直接観測することができない。そこで，第Ⅱ-3-2）節の簡素なアフィンモデルを観測可能な名目金利と物価指数に当てはめて，直接観測することができない実質金利と期待インフレ率，およびモデルのパラメータを推定することにする。Harvey [1989] の Kalman フィルターを用いた最尤法により，名目イールドの時系列データとクロスセクションデータの双方にあてはまるようにする。推定のため，(5)を以下のように書きなおす。

$$
\begin{aligned}
dr_t &= \kappa(\bar{r}-r_t)\,dt+\sigma_r dZ_t^r \\
dm_t &= \gamma(\overline{m}-m_t)\,dt+\eta_m dZ_t^m \\
\frac{dp_t}{p_t} &= m_t dt+\nu_r dZ_t^r+\nu_m dZ_t^m+\nu_u dZ_t^u
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで，σ_r，η_m，ν_r，ν_m，ν_u はスカラーの定数で，Z^r，Z^m，Z^u は1次元標準 Brown 運動である。ただし，Z^u は Z^r と Z^m に対してそれぞれ独立であるが，Z^r と Z^m の間には相関があり，r と m の変動の瞬間的な共分散を $s_{r,m}$ とおく。そして，それぞれの1次元標準 Brown 運動に対するリスクの市場価格を θ_r，θ_m，θ_u とおく。

推定に用いるデータは，国債利回りから推定した1ヶ月，3ヶ月，1年，3年，5年，7年，10年の名目イールド[5]と，全国消費者物価指数（除く生鮮食品）による物価指数である。データの期間は83年1月から04年1月までで，月次データを用いる。

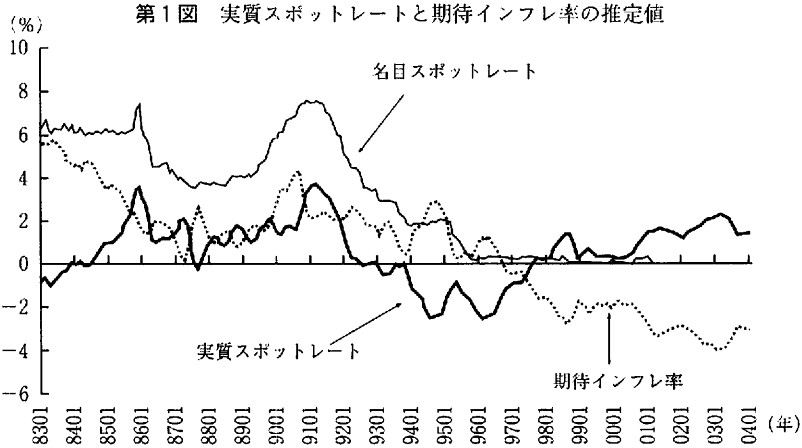
5)　ただし，1ヶ月と3ヶ月には債券限先の利回りを用いた。

第1表 パラメータの推定値

パラメータ	推定値	標準誤差	パラメータ	推定値	標準誤差
κ	0.3183	0.0093	ν_r	0.0024	0.0015
$\bar{r}$	0.0208		ν_m	0.0005	0.0012
σ_r	0.0080	0.0004	ν_u	0.0131	0.0005
γ	0.0398	0.0031	θ_r	5.8603	0.6607
$\bar{m}$	0.0082		θ_m	−8.9005	0.5888
η_m	0.0069	0.0004	θ_u	−2.1156	0.8657
$s_{r,m}$	−0.000007	0.000002			

注：1983年1月から2004年1月までの月次データを用いて，1ヶ月，3ヶ月，1年，3年，5年，7年，10年の名目イールドから Kalman フィルターによる最尤法により推定した(9)のモデルのパラメータ推定値を表す。ただし，$\bar{r}$ と $\bar{m}$ の推定値には標本平均を用いた。

第1図 実質スポットレートと期待インフレ率の推定値



注：実質スポットレートと期待インフレ率は Kalman フィルターの平滑化による r_t と m_t の推定値，名目スポットレートは実際の1ヶ月イールドを表す。

推定の際に，モデルの名目イールドに対して，実際の名目イールドは誤差をもって観測されることを許容する。また，モデルは連続時間なので，これを離散近似する。さらに，推定する必要があるパラメータの数を減らすため，実質スポットレートと期待インフレ率の長期平均を表す $\bar{m}$ と $\bar{r}$ の推定値には，

第2表　ボラティリティと相関

	実質スポットレート	期待インフレ率	期待外インフレ率
実質スポットレート	0.80%	−0.132	0.171
期待インフレ率		0.69%	0.147
期待外インフレ率			1.34%

注：対角セルは各変数の変化率の瞬間的な標準偏差（ボラティリティ），その他のセルは瞬間的な相関を表す。第1表のパラメータ推定値から求めた。

1ヶ月名目イールドと実現インフレ率のそれぞれの標本平均の値を用いる。

第1表はパラメータの推定結果を表し，第1図はKalmanフィルターの平滑化による実質スポットレートと期待インフレ率の推定値の推移を表したものである。第2表は，推定値をもとに算出した各変数のボラティリティと相関である。特に実質スポットレートと期待インフレ率の相関の推定値は −0.13 であった。相関が負であることは，期待インフレ率が低下する際には，実質スポットレートは上昇する傾向があることを意味する。この傾向は後述する米英市場の実証結果と整合する。

第Ⅱ-2節で述べた，名目スポットレートに織り込まれているインフレリスクプレミアムは，$-(\nu_r\lambda_r+\nu_m\lambda_m+\nu_u\lambda_u)$ により計算できる。ただし，

$$\lambda_r \equiv \nu_r+\nu_m\rho_{r,m}-\theta_r-\theta_m\rho_{r,m}, \qquad \lambda_m \equiv \nu_r\rho_{r,m}+\nu_m-\theta_r\rho_{r,m}-\theta_m$$

$$\lambda_u \equiv \nu_u-\theta_u, \qquad \rho_{r,m} \equiv s_{r,m}/(\sigma_r\eta_m)$$

とおいた。(2)と表現が異なるのは，ここでの標準Brown運動の間には相関があるためである。結果として，名目スポットレートに織り込まれている短期のインフレリスクプレミアムの推定値は1.58%となった。この値は後述の米英市場の実証結果に比べて幾分大きい。さらにわが国における近年の名目金利は極めて低いことを考えれば，過大といえるかもしれない。ここで用いたモデルは簡素で制約的である。リスクプレミアムを一定と仮定し，実質金利やインフレ変動の係数を定数としている。さらに，名目金利は2ファクターモデルにすぎない。また，モデルでは名目イールドが負の値になりうるが，実際のデータは正のみである。名目イールドが正の値になることを保障し，リスクプレミア

ムや係数が時間変化することを許容するようにモデルを一般化することにより，より精緻に推定することが可能になるかもしれない。

2 米英市場での実証

次に米英市場のデータを用いた最近の既存研究を簡単にまとめる。米国では物価連動国債の歴史が浅いため，以下の米国の実証では，統計的に信頼できるサンプル数を確保するために，物価連動債から直接得られる実質金利データではなく，名目金利とインフレ率などを用いて実質金利を推定している。英国では米国よりも物価連動債の歴史が古く，以下の英国の実証では物価連動債から直接得られる実質金利データを利用している。

Buraschi and Jiltsov [2005] 第Ⅱ-3-2) 節の簡素なモデルよりも多くのファクターを含むアフィンモデルにより，実証を行っている。リスクの市場価格が変動することを考慮している点も異なる。分析には，1960年から2000年までの米国のデータを用いている。結果の概要は以下の通りである。

- 通期平均のインフレリスクプレミアムは，期間1ヶ月で15ベーシス，期間3ヶ月で25ベーシス，期間10年で70ベーシスであった。
- インフレリスクプレミアムの水準は時期によって大きく異なり，短期的にも変動している。期間10年のインフレリスクプレミアムは，0.20%から1.40%の範囲で変動していた。長期のトレンドで見た場合，1960年代から1970年代にかけてインフレリスクプレミアムは徐々に上昇し，1979-1983年の時期にピークに達している。この1979-1983年の時期は，Fed が金融政策を大きく変えた時期にあたる。その後，インフレリスクプレミアムは短期的な変動を伴いながら徐々に減少している。また，いずれの期間でみても，長期ほどインフレリスクプレミアムは大きい。
- 期待インフレ率と名目イールド，インフレリスクプレミアムの間には正の相関がある。一方で，実質イールドとインフレリスクプレミアムの間には

負の相関がある。

- フォワードリスクプレミアム（フォワードレートと短期金利の期待値の差）の時間変動のうち，期間５年で23％，期間10年で42％はインフレリスクプレミアムにより説明される。

Ang and Bekaert [2004]　レジームスイッチングのアフィンモデルを用いた実証で，1952年から2000年までの米国データを使用している。結果の概要は以下の通りである。

- 実質金利の期間構造は，わずかにこぶ状であるが，おおむねフラットである。実質短期金利は大きく変動するが，実質長期イールドはさほど変動しない。
- インフレリスクプレミアムは長期ほど大きい。通期平均のインフレリスクプレミアムは，期間３ヶ月でほぼゼロ，期間１年で24ベーシス，期間５年で97ベーシスであった。
- 実質短期金利は，期待インフレや期待外インフレと負の相関を持つ。
- 短期，長期を問わず，名目イールドの変動の80％は期待インフレとインフレリスクプレミアムの変動により説明される。
- 期待インフレとインフレリスクプレミアムは，短期の期間スプレッドのうち50％しか説明できないが，長期の期間スプレッドの多くを説明する。

Shen [1998]　英国のデータを用いた実証で，期間構造モデルを利用していない。物価連動債より求めた実質イールドから名目イールドを控除し，サーベイによる期待インフレ率を名目イールドに含まれる期待インフレ率の代理変数として，さらに控除することによりリスクプレミアムを計算している。英国の1996年から1997年までのデータを用いて計算した結果，インフレリスクプレミアムは，期間10年で74ベーシス，期間20年で98ベーシスであった。

Evans [2003]　Shen [1998] と同様に英国のデータを用いて，1983年から

1995年までのデータ期間で実証している。また，Ang and Bekaert [2004] と同様に，レジームスイッチングのアフィンモデルを用いているが，リスクの市場価格を定数に制約している。一方で，物価連動債から得られる実質イールドも利用している。結果の概要は以下の通りである。

- 名目イールドと実質イールドの差（以下，スプレッド）は，期待インフレ率の信頼できる推定値ではない。このスプレッドは，期間1ヶ月で0.6%から1%期待インフレ率を上回り，期間10年で1%から3.5%期待インフレ率を下回る。
- インフレリスクプレミアムの変動は，期間1ヶ月から36ヶ月のスプレッドの変動にほとんど寄与しない。5年を超える期間では，インフレリスクプレミアムが変動するために，スプレッドの変化は期待インフレ率の変化を11%から32%下回る。
- 実質イールドとインフレリスクプレミアムがともに変動するために，超短期と長期の期間では，名目イールドの変化は，期待インフレ率の変動を過小に見積もる。しかし，2～3年の期間では，実質イールドとインフレリスクプレミアムの変動がオフセットされて，名目イールドは期待インフレ率と1対1に変動する。

以上の文献から判断すると，米英市場における平均的なインフレリスクプレミアムは，Evans [2003] の結果を除き，1年未満の短期で概ね0.5%以下，期間10年で1%弱の大きさであり，また時期によって変動していることが分かる。さらに，実質金利の変動特性は名目金利のものとは異なっていることも分かる。

IV インフレリスクプレミアムの決定メカニズム

第II章の議論では，インフレリスクプレミアムがどのようなメカニズムにより決定されるのかについては全く触れていない。言い換えれば，状態価格密度過程 ξ を構成するリスクの市場価格過程 θ がどのようにして決まるのかにつ

いて述べていない。

当然のことながら，リスクプレミアムは市場での売買を通じた均衡で決定されている。標準的なファイナンス理論では，個々の投資家（経済主体）が自らの効用を最大化するように，実質消費と投資の構成を最適に決定することを想定している。効用は将来にわたる実質消費によって定まる。各資産への最適な投資額は，富を持ち越して将来の最適実質消費をまかなうように定まる。こうした各投資家の最適戦略の結果，各資産の価格が調整されて，経済全体で各資産の需給が一致することを想定している。この需給の一致が均衡の定義である。均衡での価格や金利は動的かつ確率的に変動する。価格が均衡で定まることは，言い換えれば，リスクの市場価格や状態価格密度が各時点・各状態ごとに定まることを意味する。

金利の一般均衡モデルとしてよく知られる Cox, Ingersoll and Ross [1985] は，完備市場の設定のもとで，(2)の式中の狭義のインフレリスクプレミアム $-\nu_t \cdot \theta_t$ が以下のように定まることを示している。

$$-\nu_t \cdot \theta_t = \frac{w_t J_{ww}}{J_w} \mathrm{cov}_t\left(\frac{dw_t}{w_t}, \frac{dp_t}{p_t}\right) + \frac{x_t J_{wx}}{J_w} \mathrm{cov}_t\left(\frac{dx_t}{x_t}, \frac{dp_t}{p_t}\right)$$

ただし，p_t は物価（インフレ水準），w_t は代表的経済主体の実質資産額，x_t は経済の資本ストックの変動に影響を与える状態変数，J は各時点における代表的経済主体の効用の最大値（間接効用あるいは価値関数）で，J の添え字は偏微分を表す。右辺第 1 項は，実質資産額の変化率とインフレ率の共分散と代表的経済主体の相対リスク回避係数の積を表す。右辺第 2 項は，状態変数の変化率とインフレ率の共分散により定まる項である。

Cox, Ingersoll and Ross [1985] は，インフレ水準を外生変数として扱っているが，インフレ水準もまた経済の均衡により定まると考えられる。インフレ水準は，貨幣の実質価値の逆数であり，均衡インフレ水準を扱うには貨幣の役割をモデル化する必要がある。貨幣を保有すると，金利がつかないためにコス

トがかかるが，貨幣には消費財の購入を低コストで実行することができる能力があると理解されている。貨幣をモデルに取り込みかつ扱い易い方法の一つとして，実質消費のほかに実質貨幣残高に対しても効用が定まるように定式化する方法が知られている。この設定のもとで，Bakshi and Chen [1996] は(2)の式中の狭義のインフレリスクプレミアム $-\nu_t \cdot \theta_t$ が以下のように定まることを示している。

$$-\nu_t \cdot \theta_t = \frac{c_t u_{cc}}{u_c} \mathrm{cov}_t\left(\frac{dc_t}{c_t}, \frac{dp_t}{p_t}\right) + \frac{\pi_t u_{c\pi}}{u_c} \mathrm{cov}_t\left(\frac{d\pi_t}{\pi_t}, \frac{dp_t}{p_t}\right)$$

ただし，p_t は物価（インフレ水準），c_t は経済全体の実質消費，π_t は実質マネーサプライ，u は代表的経済主体の効用関数で，u の添え字は偏微分を表す。Cox, Ingersoll and Ross [1985] との違いはリスクプレミアムにマネーサプライ（これは外生的に与えられている）が関係している点である[6]。均衡での p_t は以下のようにバックワード形式で定まる。

$$\frac{1}{p_t} = E_t \int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} \frac{u_\pi(c_s, \pi_s)}{u_c(c_t, \pi_t)} \frac{1}{p_s} ds$$

ここで ρ は代表的経済主体の効用関数の異時点間の主観的割引率を表す正の定数である。

V まとめ

本稿では，しばしば混乱して理解されている，実質金利と名目金利の関係について，ファイナンス理論の標準的な議論をもとに明らかにした。将来のインフレは不確実なので，その不確実性に応じたリスクプレミアムが存在し，それが名目金利に含まれることになる。

6) Cox, Ingersoll and Ross [1985] は生産経済での一般均衡を扱い，Bakshi and Chen [1996] は純粋交換経済に貨幣を埋め込んだ貨幣経済での均衡を扱っている。したがって経済全体の実質消費は，前者では内生的に定まるが，後者では外生的に与えられている。後者のモデルを生産経済での一般均衡に拡張したものに Lioui and Poncet [2004] がある。Bakshi and Chen [1996] の結果に状態変数がないのは，モデルに状態変数を導入していないためである。

本稿では，名目金利と実質金利，期待インフレ率，インフレリスクプレミアムの間の理論的な関係式を導出した。その際，スポットレートとイールドの違いについても注意を払った。さらに，わが国の市場データを用いてインフレリスクプレミアムに関する実証を行い，併せて米英市場の実証結果についても概説した。最後に，インフレリスクプレミアムの決定メカニズムに関して均衡論をもとに簡単に述べた。

本稿では触れていない興味深い問題として，名目債券のみならず実質債券にも投資できるようになった近年の状況が，どのように経済主体の効用を増加させることになるのか，という問題がある。Viard [1993] は経済主体の効用にわずかな影響しか与えないとしている一方で，Campbell and Viceira [2002] 3章では相応の効用の増加があるとしている。特に，インフレ率の不確実性が高い場合には，Campbell and Viceira [2002] 3章はその増加が非常に大きいとしている。

しかしながら，Viard [1993] や Campbell and Viceira [2002] 3章の議論は，実質債券の有無に関わらず他の証券の価格過程が不変であることを前提にしている点で制約的である。この前提は一般均衡においては成り立ちそうもない。実質債券が存在すればインフレリスクをヘッジすることが可能になるために，実質債券が存在しない経済に比べて，各経済主体の最適消費が変化し，均衡における証券の価格過程の期待リターンやボラティリティが変わる可能性がある。こうした分析はまだ探求されていない興味深いトピックであるように思われる。

付　　録

(6)と(7)式中の $F_1(s-t;\theta)$，$F_2(s-t)$，$G_1(s-t;\theta)$，$G_2(s-t)$，$H(s-t)$，$I(s-t, m_t)$ の関数形は以下の通りである。

$$F_1(x;\theta)=\left(\bar{r}-\frac{\sigma\cdot(\nu+\theta)}{\kappa}-\frac{\sigma\cdot\sigma}{2\kappa^2}\right)(F_2(x)-x)-\frac{\sigma\cdot\sigma}{4\kappa}F_2(x)^2$$

$$G_1(x;\theta)=\left(\bar{m}-\frac{\eta\cdot(\nu+\theta)}{\gamma}-\frac{\eta\cdot\eta}{2\gamma^2}\right)(G_2(x)-x)-\frac{\eta\cdot\eta}{4\gamma}G_2(x)^2$$

$$F_2(x)=\frac{1-e^{-\kappa x}}{\kappa},\qquad G_2(x)=\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma}$$

$$H(x)=-\sigma\cdot\eta\left(\frac{F_2(x)}{\kappa(\kappa+\gamma)}+\frac{G_2(x)}{\gamma(\kappa+\gamma)}+\frac{F_2(x)\,G_2(x)}{\kappa+\gamma}-\frac{x}{\kappa\gamma}\right)$$

$$I(x,\,m_t)=\frac{1}{x}\left[G_2(x)m_t-\left(\overline{m}+\frac{\nu\cdot\eta}{\gamma}+\frac{\eta\cdot\eta}{2\gamma^2}\right)(G_2(x)-x)-\frac{\eta\cdot\eta}{4\gamma}G_2(x)^2\right]$$

参考文献

Ang, A. and G. Bekaert [2004] "The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation," *Working Paper*, Columbia University.

Bakshi, G. and Z. Chen [1996] "Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rates in Monetary Economics," *Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 241-275.

Buraschi, A. and A. Jiltsov [2005] "Inflation Risk Premia and the Expectations Hypothesis," *Journal of Financial Economics*, Vol. 75, pp. 429-490.

Campbell, J. and R. Shiller [1996] "A Scorecard for Indexed Government Debt," *NBER Working Paper*, No. 5587.

Campbell, J. and L. Viceira [2002] *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press.（木島正明監訳，野村證券金融経済研究所訳『戦略的アセットアロケーション』東洋経済新報社，2005年）。

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross [1985] "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385-407.

Duffie, D. [2001] *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd ed., Princeton University Press.

Duffie, D. and R. Kan [1996] "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 6, pp. 379-406.

Evans, M. [2003] "Real Risk, Inflation Risk and the Term Structure," *Economic Journal*, Vol. 113, Iss. 487, pp. 345-389.

Harvey, A. [1989] *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.

Lioui, A. and P. Poncet [2004] "General Equilibrium Real and Nominal Interest Rates," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 28, pp. 1569-1595.

Shen, P. [1998] "How Important Is the Inflation Risk Premium?," *Economic Review*, Vol. 83, Iss. 4, Federal Reserve Bank of Kansas City.

Viard, A. [1993] "The Welfare Gain from the Introduction of Indexed Bonds," *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 25, pp. 612-628.
木島正明［1999］『期間構造モデルと金利デリバティブ』朝倉書店。