

# ヴィンテージ・モデルを用いた 日本の製造業における X 非効率の推計\*

鳥居 昭夫

2003 年 1 月 16 日

## 1 ライベンシュタインの X 非効率

X 非効率をめぐる、Leibenstein [1966] 以来、活発な議論が行われた。しかし、それらの議論においては、まったく X 非効率の計測を対象としてはいなかった。<sup>2</sup> ほとんどの X 非効率の議論は企業の内部組織に発生する非効率の存在問題を論じていた。X 非効率は、企業行動を対象としているものの、実証分析というよりも理論分析に立脚した概念であった。たしかに、企業間で発生する生産性の分散・高低を観測した研究は数多くあり、その多くは X 非効率の計測を目指した研究であると明言している。Leibenstein 自身、生産性に散らばりがあり、すべての企業が効率的なわけではないと気付いたことが X 非効率の議論の出発点であると述べている。しかし、それらの実証的研究によって、計測されている対象は技術非効率に違いない。こうして観測された技術非効率が X 非効率であるということを確認できれば、X 非効率は実証的な概念であると言ってもよいだろう。しかし、技術非効率が観測されるという事実が、X 非効率の存在を実証しているものとしてよいのかどうかについて、残念ながらほとんど議論されてはこなかった。

本稿では、「技術非効率が観測されるという事実が、X 非効率の存在を実証しているものとしてよいのかどうか」という命題し、「計量経済学的に技術非効率として計測した生産性の格差や散らばりの大きさが、X 非効率の特徴である理論的な議論と整合的であるかどうか」、そして「技術非効率推計量のなんらかの統計的性質が、X 非効率によって発生したものであると同定できることを保証しているか否か」という命題をパティ・クレイ型ヴィンテージ・モデルを用いて実証的に分析することである。これまで、X 非効率はさまざまに議論されたものの、このような命題は残念ながら設定されたことはなかった。本稿では、この目的を果たすために、X 非効率と技術非効率の関係を考察し整理する。次に、第 5 節から、より実証的に X 非効率の存在を確認するための方法を議論する。最後に、第 8 節から日本の製造業における X 非効率の存在について実証的な分析を行なう。

議論をはじめの前に、用語による混乱を避けるため、本稿では、Leibenstein が説明しようとした企業組織に内在する非効率を X 非効率とし、計量経済学の方法によって観測される生産性の散らばりを技術非効率として議論を行う。X 非効率とはどう定義できるかということが本稿の中心的なテーマになるので、しばらくの間 X 非効率を明示的に定義しないまま、この用語法で議論を行う。第 4 節において、統計的に反証可能な X 効率の概念を提示する。

Leibenstein が X 非効率の理論として提示している議論は多岐にわたる。1987 年の著書 *Inside the Firm, The Inefficiencies of Hierarchy* において展開されている理論に代表されるように、通常 X 非効率は企業の内部組織上の問題として考えられている。内部組織において発生する非効率の要因をまとめると：

\*本稿は拙稿『日本産業の経営効率』(NTT出版、2000年3月)の第3章から第5章にかけての、ヴィンテージ・モデルに関する部分の抜粋である

<sup>2</sup>Frantz [1988] を見よ。

ある特定可能かつ計量可能な生産物ないしはサービスを生産する組織を考える。この組織の構成員からなるある真部分集合（1人の集合でもよい）がその集合の利益のために、組織全体の生産物の最大化をはかるために必要な行動をとらないことがある

となる。Leibenstein [1976] においても、同じ主旨によって X 非効率性が定義されている。同著で X 非効率性を発生させる原因として強調されているのは、囚人のジレンマ (prisoner's dilemma)、惰性行動領域 (inert area) の存在、そして超自我 (superego) である。

## 2 技術非効率性を説明するためのモデル

前節に紹介した Leibenstein の X 非効率性の理論を出発点として、実証的に観測される技術非効率性との関係を考えて行く。最初に、本節において、技術非効率性を説明するための二つのモデルを設定する。モデルは、ヴィンテージ非効率モデル、および経営管理非効率モデルと名付けられる。

### 2.1 ヴィンテージ非効率モデル I

ある産業におけるフロンティア生産関数が、 $y = f(k)e^{\alpha t}$  で表せるとする。ここで、 $y = Y/L$ ,  $k = K/L$ ,  $Y$ :産出,  $K$ :資本,  $L$ :労働  $\alpha$ :生産性成長率である。すなわち、この産業の生産技術は毎年一定の割合で（ヒックス中立的に）進歩していると仮定している。フロンティア生産関数は、ここでは  $t$  時点で最も効率的な技術を採用した場合の生産関数を意味するものとする。賃金率、利子率は一定であるので最適な資本労働比率も一定で  $k^*$  であり、すべての事業所は、それぞれの年度にこの最適資本労働比率に即した設備を建設しているものとする。ただし、建設した生産技術は次に事業所の設備を更新するまで一定であり、同じ技術と生産性の下で操業しなければならない。ある年度に設備を更新すれば、その時点での最も新しい性能の設備、すなわち効率性を獲得できるが、次に設備を更新するまではその生産性が維持される。すなわち、パテ・クレイ型のモデル (Putty-Clay Model) である。事業所は、毎年最新の技術を導入するために設備を不断に更新し続けなければならないが、最新の技術に比べると相対的に低い生産性しかあげることができない。すなわち、フロンティア生産技術と比べると非効率となっている。

この産業は  $N$  の事業所からなっている。 $i$  番目の事業所の産出高は  $L_i f(k^*) \exp(\alpha t_i)$  であるので、産業の総産出高は  $\sum_i L_i f(k^*) \exp(\alpha t_i)$  である。ここで、 $t_i$  は  $i$  番目の事業所の建設年度であり、労働生産性は  $f(k^*) \exp(\alpha t_i)$  である。したがって、時点  $\tau$  における  $i$  番目の事業所のフロンティア技術に対する効率性は  $f(k^*) \exp(\alpha t_i) / f(k^*) \exp(\alpha \tau) = \exp(\alpha(t_i - \tau))$  である。ここで、生産関数を対数表示して、

$$\log y = \log f(k) + \alpha t$$

とする。同じ対数表示とすると、時点  $\tau$  における  $i$  番目の事業所のフロンティア技術に対する効率性はフロンティア技術を 0 として、 $\alpha(t_i - \tau) < 0$  となる。この状態をここでは表記の簡便さのため、「非効率性が  $\alpha(\tau - t_i) > 0$  である」と呼ぶことにする。事業所の非効率性は、建設時 0 であり、それから 1 単位時間あたり  $\alpha$  だけの割合で上昇し、建設時より  $t$  だけ経過すると  $\alpha t$  となる。このように、各事業所の非効率の程度は、一定の割合で増大していく。

以上を一般的な設定とする。さらにこの節では、もっとも単純なケースにおいて、設備更新のタイミングの決定問題を考察する。産業内に等規模の  $N$  だけの数の事業所があり、それぞれ別の企業によって経営されているとする。ある時点  $\tau$  において非効率の程度が  $x$  であった場合、更新投資をおこなうと、更新投資をおこなわなかった場合に比べて、単位生産量あたり  $C(\exp(x) - 1)$  の流列のコストを節約することができる。 $C$  は  $\tau$  時点でのフロンティア技術におけるコスト水準である。時点 0 におけるフロンティア技術におけるコスト水準を  $C_0$  とおくと、 $C = C_0 \exp(-\alpha \tau)$  である。流列、 $C(\exp(x) - 1) = C_0 \exp(-\alpha \tau)(\exp(x) - 1)$

で示されるコスト節約の割引現在価値は  $C_0 \exp(-\alpha\tau)(\exp(x) - 1)/r$  である。ここで、 $r$  は割引率とする。このコスト節約の割引現在価値が、設備更新の費用より大きくなった場合に設備更新をおこなえば、それは合理的な意思決定である。ここで、供給容量  $q$  の生産設備の設備更新の費用は、 $(F_0 + qK_0) \exp(-\alpha\tau)$  で表されるとする。この費用は、規模にかかわらず一定額かかる部分と、規模に応じてかかる部分からなっている。設備更新の費用も、フロンティア技術と同様の技術進歩により時間に対して逓減していると仮定する。総需要は一定  $D$  であり、各事業所は  $D/N$  の供給を市場に対して行うものとする。このとき、設備更新のタイミングは、

$$\frac{C_0 \exp(-\alpha\tau)(\exp(x) - 1)}{r} \times \frac{D}{N} = (F_0 + K_0 \frac{D}{N}) \exp(-\alpha\tau)$$

すなわち、非効率の程度  $x$  が  $(C_0(\exp(x) - 1)/r - K_0)D/N = F_0$  を満たすとき設備を更新する選択が最適である。したがって、一定の

$$\frac{1}{\alpha} \log \left( \frac{r}{C_0} \left( \frac{NF_0}{D} + K_0 \right) + 1 \right) \quad (1)$$

の間隔で設備更新を行うのが最適な選択である。この値は、 $F_0 > 0$  であるかぎり、すなわち設備更新の費用に固定的部分があるかぎり、企業数  $N$  の関数である。設備更新の間隔が大きいほど、平均的な非効率の程度も大きく、観測される技術非効率の水準も大きくなる。したがって、設備更新の費用に固定的部分があるかぎり、技術非効率の大きさは、市場構造に依存する。

しかし、以上の説明では、単純化して要点を明らかにするために、いくつかの論点を捨象してしまっている。市場構造について言及しているのに、競争的相互依存性は考慮していない。設備更新を決定する主体は事業所としてしまっていて、複数の事業所を運営している企業の存在を考慮していない。さらに社会的最適性の面からの分析をしていない。これらの点については、鳥居 [2000, 第2章補論] を参照されたい。複数事業所を持つ企業の設備更新の意思決定、また競争的相互依存性を考慮した、より精緻な議論をモデルを用いて、市場構造の差異が観測される技術非効率を決定することを証明している。

## 2.2 経営管理非効率モデル

非効率を伴うモデルをもう一つ作成する。ある商品の製造過程が、数直線  $[0, 1]$  の区間で連続的に示される工程に区分できるとする。その工程の中の任意の一点において、微小時間  $\Delta t$  内に確率  $\eta \Delta t$  で、非効率が発生するものとする。すなわち、ポアソン過程にしたがって非効率が発生する。これらの非効率は、日和見的行動、囚人のジレンマをもたらすとされるフリー・ライド的行動、環境変化に不感応な惰性的行動などの X 非効率の理論によって説明される諸要因によって発生するものとする。工程の非効率化の影響によって、製造過程全体の生産性も低下する。もし、 $M$  だけの非効率が発生したとすると、非効率がまったくない場合に比べ、 $100Ma$  パーセントだけ生産費が増大してしまうとする。さらに、ノイズや不確実性があるという観測上の問題が存在し、結果としての生産費の水準を見ただけでは、生産性低下の要因が工程内の非効率の発生によるのか、それとも環境要因によるのかどちらであるかを経営者が判定することは不可能であるものとする。

経営者は、非効率の問題に対処するため、なんらかのタイミングで、各工程に対する審査を行う政策をとるとする。この審査タイミングの設定方法として二つの方法を考える。一つの方法は、非効率が確率的に発生していることを最初から前提としてしまう経営者が取る方法である。この経営者は、定期的に一定間隔ですべての工程をチェックし改善し、非効率が残存しないよう管理を実行する。もう一つの方法は、経営者が非効率の発生を最初から仮定することはしない場合である。この経営者は、非効率をランダムなチェックによって実際に見つけないかぎり、改善策をとらない。まず、一定の間隔でランダムに一定の工程を選択し、非効率が発生していないかどうかを直接審査する。審査の結果、非効率が発見できなければ何も行わない。一方、もし非効率が発見されると、全工程に対し工程チェックを行い非効率が残存しないよう管

理を強化する。どちらの管理方法をとる場合でも、管理強化によって非効率性が解消された後には、また同様のメカニズムで非効率が発生するものとする。

前者の政策をとる場合には、問題の構造は前項のヴィンテージ型非効率モデルと同じものとなる。定期的な管理チェックがなければ、この製造過程の生産性の期待値は、1 単位時間あたり  $100a\eta$  パーセントの割合で低下してゆき、管理強化に伴って非効率性は 0 に戻る。<sup>34</sup> ヴィンテージ型非効率モデルとの差は技術進歩によって相対的な生産性がシフトしてゆくか、X 非効率によって生産性が低下していくかの差、および、決定論的に一定の割合で生産性がシフトするか、確率的に低下するかどうかであり、設備更新を行うタイミングを決定する問題と、管理チェックを行うタイミングを決定する問題は同じ構造を持っている。管理チェックの間隔が  $T$  の場合、平均的な非効率性は  $Tab/2$  である。したがって、非効率性 0 の時の生産費を単位あたり  $C_1$  とおくと、産出量  $Q$  の時、非効率によって生じる平均的な追加費用は時間平均で  $QC_1Tab/2$  である。一方、管理チェックの費用が前モデルと同じように固定部分  $F_1$  と従量部分  $K_1Q$  とからなる  $F_1 + K_1Q$  であるとする、管理費用の時間平均は  $(F_1 + K_1Q)/T$  である。両費用の合計を最小にする  $T$  は、

$$T = \sqrt{\frac{2}{abC_1} \left( \frac{F_1}{Q} + K_1 \right)}$$

である。ヴィンテージ非効率モデルとの差は、設備投資の問題に比べ時間スケールがはるかに短いと考えられるため、割引ファクターを考慮していないことだけである。

次に経営者がもう一つの管理方法、すなわち、非効率の存在を前提せず、一定確率でランダムに一つづつの工程の状態を直接審査する方法をとった場合を考える。この審査は  $\Delta t$  時間あたり数直線上の測度  $\delta\Delta t$  の区間の工程を審査する割合で行われるものとする。また、ヴィンテージ非効率モデルと同様に、単位あたりの生産費が  $C_1x$  だけ上昇してしまっている状態を非効率性  $x$  の状態と呼ぶ。非効率性  $x$  の状態のときには、全工程のうち、 $x/a$  だけの工程に非効率が発生している。したがって、ランダムに測度  $\delta\Delta t$  の領域内にある工程が審査を受けるとき、非効率が発見される確率は  $1 - (1 - \delta\Delta t)^{x/a}$  である。

各時点の効率性  $x$  は確率変数である。 $\rho(x, t)$  を時点  $t$  において非効率性が  $x$  である確率密度関数であるとする。微小な時間間隔  $\Delta t$  内に、審査によって非効率な工程が発見されることによって全工程がチェックされ、 $x$  が 0 となる確率は前述のとおり  $1 - (1 - \delta\Delta t)^{x/a}$  である。残りの  $(1 - \delta\Delta t)^{x/a}$  の確率で非効率は見逃されてしまう。この時非効率が見逃されるという条件の下で、同じ  $\Delta t$  の時間内に  $\eta\Delta t$  の確率で非効率な工程が一つ増大し、非効率水準は  $x$  から増大して  $x + a$  となり、 $1 - \eta\Delta t$  の確率で非効率水準は  $x$  のままである。したがって、確率密度関数は

$$\rho(x + a, t + \Delta t) = \rho(x, t)(1 - \delta\Delta t)^{x/a}\eta\Delta t + \rho(x + a, t)(1 - \delta\Delta t)^{x/a+1}(1 - \eta\Delta t) \quad (2)$$

にしたがう。右辺第 2 項は、すでに  $M + 1 = (x/a + 1)$  の工程で非効率が生じていたが、 $\Delta t$  内に非効率が変化しなかった場合を表している。

式 (2) によって示される確率過程の定常 (平衡) 分布をとらえることによって、どのような  $x$  の分布を観測できるかを考える。 $x$  の状態空間を離散型と仮定したため、(2) の定常分布を連続型分布で近似するた

<sup>3</sup>非効率性がまったく無い初期時点を 0 とすると、 $t$  期後に  $M$  個の非効率が生じている確率は、ポアソン過程の仮定より、 $(\eta t)^M \exp(-\eta t)/M!$  である。 $E(M) = \eta t$  であるから、非効率によってコストは  $a\eta t$  上昇していると考えられる。

<sup>4</sup>ポアソン過程で非効率が発生することによる非効率水準の確率過程を、一定の速度で非効率率が増大する過程に近似できることを、次のような確率過程によって説明できる。ある時刻  $t$  において  $M$  個の非効率が発生しているとする。このとき、 $\Delta t$  の時刻内に、確率  $\eta\Delta t$  で、非効率工程数は 1 だけ増大して  $M + 1$  となる。残りの、 $1 - \eta\Delta t$  の確率で非効率の工程数は  $M$  にとどまる。この過程は、後述の確率密度関数  $\rho(x, t)$  を用いて、

$$\rho(M + 1, t + \Delta t) = \rho(x, t)\eta\Delta t + \rho(M + 1, t)(1 - \eta\Delta t)$$

と記述できる。右辺第 2 項は、すでに  $M + 1$  の非効率が生じていたが、 $\Delta t$  内に非効率が変化しなかった場合を表している。 $\Delta t$  が非常に小さい場合には、この式を展開して  $\Delta t$  の 2 乗以上の項を無視することにより、

$$\rho_t(M + 1, t) = -\eta(\rho(M + 1, t) - \rho(M, t))$$

を得る。この式は、明らかに、確率密度関数の波動が速度  $\eta$  で移動することを表している。

めに、 $a$  が十分に小さいと仮定する。このため、さらにパラメータに関していくつかの仮定が必要である。すなわち、

$$a \rightarrow 0 \text{ のとき、 } a\eta \rightarrow H, \delta/a \rightarrow G$$

とする。 $H$  および  $G$  は定数である。最初の仮定は、一つの工程に発生する非効率による影響が小さくなるほど、非効率が発生する確率は高くなり、全工程の効率性水準が時間あたり低下していく速度はかわらないと仮定している。次に、審査できる工程数  $\delta$  が非効率が発生する速度  $a$  に依存するとしたのは、一つの工程で発生すると考える非効率の程度が顕著であるほどその非効率は発見しやすく、審査も容易であると考えられるからである。

まず、 $a$  と  $\Delta t$  が十分に小さいと考えて (2) を  $a$  と  $\Delta t$  とに関してテーラー展開することによって、

$$\begin{aligned} & \rho(x, t) + \rho_x(x, t)a + \rho_t(x, t)\Delta t + \rho_{xt}(x, t)a\Delta t + o(a^2) + o(\Delta t^2) \\ = & \rho(x, t)(1 - \delta\Delta t)^{x/a}\eta\Delta t + (\rho(x, t) + \rho_x(x, t)a + o(a^2))(1 - \delta\Delta t)^{x/a}(1 - \delta\Delta t)(1 - \eta\Delta t) \end{aligned}$$

をえる。ただし、添字は偏微分を示す。両辺から  $\rho(x, t)$  を控除した後、各項に  $1/\Delta t$  を乗し整理して

$$\begin{aligned} & \rho_x(x, t)a/\Delta t + \rho_t(x, t) + \rho_{xt}(x, t)a + o(a^2)/\Delta t + o(\Delta t) \\ = & \rho(x, t)((1 - \delta\Delta t)^{x/a} - 1)/\Delta t - \rho(x, t)(1 - \delta\Delta t)^{x/a}\delta(1 - \eta\Delta t) \\ & + \rho_x(x, t)(1 - \delta\Delta t)^{x/a}(1 - \delta\Delta t)(1 - \eta\Delta t)a/\Delta t \\ & + o(a^2)/\Delta t(1 - \delta\Delta t)^{x/a}(1 - \delta\Delta t)(1 - \eta\Delta t) \end{aligned}$$

をえる。ここで、 $a \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  の極限をとる。ただし、 $a/\Delta t \rightarrow b$  となるようにとるものとする、

$$\rho_x(x, t)b + \rho_t(x, t) = -Gx\rho(x, t) - \rho(x, t) \cdot 1 \cdot 0 \cdot (1 - H/b) + \rho_x(x, t) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 - H/b) \cdot b$$

すなわち、

$$\rho_t(x, t) = -Gx\rho(x, t) - H\rho_x(x, t)$$

となる。ただし、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, a \rightarrow 0} (1 - \delta\Delta t)^{\frac{x}{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, a \rightarrow 0} (1 - \delta\Delta t)^{-\frac{1}{\delta\Delta t}(-a\frac{\delta}{a})\frac{\Delta t}{a}x} = (e^{-0 \cdot G})^{\frac{x}{b}} = 1$$

および、この結果を用いた、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, a \rightarrow 0} \frac{(1 - \delta\Delta t)^{x/a} - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, a \rightarrow 0} \frac{-\delta x/a \cdot (1 - \delta\Delta t)^{x/a-1}}{1} = -Gx$$

を使っていることに注意されたい。

ここで、 $0 < x < \infty$  で定義された確率密度関数の漸近分布  $\rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t)$  を考える。 $\rho_t(x) = 0$  であるから、 $\rho(x)$  は微分方程式

$$\rho_x(x) = -Gx/H \cdot \rho(x)$$

を満たさなければならない。この微分方程式は簡単に解けて

$$\rho(x) = R \times \exp\left(-\frac{G}{2H}x^2\right) \quad (3)$$

をえる。ただし、 $R$  は定数である。この定常分布は、収束を特定化するために任意に設定した定数  $b$  に依存していないことに注意されたい。

$\rho(x)$  は確率密度関数であるから、

$$\int_0^\infty \rho(x)dx = \int_0^\infty R \exp\left(-\frac{G}{2H}x^2\right) dx = Ra\sqrt{\frac{\pi H}{2G}} = 1$$

でなければならない。このことから定数の値を得ることができ、定常確率密度関数は、漸近的に

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{2G}{\pi H}} \exp\left(-\frac{G}{2H}x^2\right)$$

となる。本節で設定した仮定の下では、非効率性は上式で示されるように半正規分布をなす。これまでの多くの技術非効率の推計モデルにおいて、とくに確率論的フロンティアモデルを採用する場合において、技術非効率は半正規分布をなすと仮定されていることと整合的である。すなわち、この経営管理非効率モデルは半正規分布をなす技術非効率を説明する一つの仮説モデルとなっている。

平均的非効率性は、

$$E(x) = \int_0^{\infty} \rho(x)x dx = \sqrt{\frac{2H}{\pi G}} \quad (4)$$

で表される。 $G$  は時間あたりの審査努力の程度を示すパラメータである。平均非効率性はこのように  $G$  の平方根に逆比例しているため、単位あたり生産費用は  $C_1(1 + C_2/\sqrt{G})$  と表せる。ただし、 $C_2 = a\sqrt{2H/\pi}$  である。審査を頻繁に行うという経営努力によって、生産費用は削減される。しかし、この経営努力を実行するためには管理費用がかかる。この管理費用をやはり生産量  $Q$  と審査努力  $G$  の関数として  $C_m(G, Q)$  と表されるとすれば、経営陣は総費用  $QC_1(1 + C_2/\sqrt{G}) + C_m(G, Q)$  を最小にする  $G$  を選択するのである。その一次条件は、

$$-\frac{QC_1C_2}{2G^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial G}C_m(G, Q) = 0$$

である。

### 3 X 非効率と技術非効率

以上の準備の下に、X 非効率の存在という理論的な問題に対して、技術非効率が経験的に観測されるということがどういう意味を持つのかという、X 非効率と技術非効率との関係を考察する。

第 1 節の各小節で X 非効率の理論として紹介した三つの議論を検討してみると、第 1 節の冒頭の部分で提示した、Leibenstein の「組織としての利益最大化行動と構成員または構成員のグループの最適化行動との相克」という定義が、それらの議論と整合的であることがわかる。囚人のジレンマは明らかに説明されている非効率の一つである。惰性的行動領域の存在についても、調整費用が組織構成員に発生している費用であり、組織の生産費用とは考えられていないことを考えれば、構成員にとっての最適領域と組織の利益とが食い違うことによる非効率としてよいだろう。さらに、超自我の理論で要素としてあげられている合理性は組織にとっての合理性であることは明らかである。個人の最適行動の結果、組織にとっては必ずしも最適ではない水準の合理性が選択されている。

もし、この Leibenstein の定義を X 非効率の定義として採用したとすれば、それは非効率の発生原因によって X 非効率を定義しようとするに他ならない。通常多くの X 非効率の定式化は、この原因による X 非効率の定義の範疇にある。議論の出発点として、まずこのように原因によって X 非効率を定義することから、X 非効率と技術非効率の関係の検討をはじめよう。

#### 3.1 X 非効率ではない技術非効率

ヴィンテージ非効率モデル I で観測される非効率の性質を考える。Putty-Clay 型モデルであるから、設備を更新すれば、その時点での最も新しい性能の設備、すなわち効率性を獲得できる。しかし、次に設備を更新するまではその生産性が維持される。事業所は、毎年最新の技術を導入すべく設備を不断に更新し続けなければ、最新の技術に比べると相対的には低い生産性しかあげることができない。すなわち、設備更新直後以外ほとんど常に、最新のフロンティア生産技術と比べると非効率である。しかし、限らない

投資費用をかけ常に最新技術を体化した設備に更新し続ける行為は、合理的な行動とはいえない。合理的な経営者は、設備更新の費用と設備更新が生産性の向上に与える効果を考え、望ましい設備更新のタイミングを選択する。しかし、達成される生産性はフロンティア技術から乖離しているため、技術非効率が存在し、観測される。この観測される技術非効率は「無駄、waste」を意味しないことは明らかである。したがって、X非効率ではありえない。外部効果が無ければ、この事業者にとっての最適性したがって効率性と、社会的最適性・効率性が一致する。したがって、社会的にも非効率では無い。この命題は Førsund and Hjalmarsson [1987] によって、「静的には非効率に見える分散した構造も最適な動学的帰結の一面に過ぎないかも知れない (p.69)」と主張された。このように、生産性に高低の散らばりがあることだけでは、非効率が存在することの根拠にはならない。ヴィンテージ非効率モデル I において観測される技術非効率は、単に見かけ上非効率であるに過ぎない。

### 3.2 技術非効率としては観測されない X 非効率

3.1で例を示したように、観測されるすべての技術非効率が X 非効率であるというわけではない。それでは逆に X 非効率が存在しているとすれば、それは必ず技術非効率として観測されるだろうか。技術非効率として観測されるための計量経済学的な条件は、もちろん観測する方法によって異なる。ただし、どの方法をとっても、観測されるサンプルの間に、他の条件を調整した後にも生産性の散らばりが残っていなければ技術非効率は観測されない、という点については同じである。

確率的生産フロンティア関数を仮定する場合、観測される生産性はフロンティア技術における生産性とランダムな擾乱項および非効率項の和で表されている。COLS 法や最尤法などの計量経済学的方法によって、観測される生産性の散らばりを、生産要素の組み合わせの差として説明できる部分、対称な誤差項、技術非効率による非対称な乖離項のそれぞれの要因に分解される。この方法をとる場合には、生産性に散らばりがあるだけでは技術非効率が観測されるのに十分ではない。さらに、OLS で生産関数を求めた場合に、回帰残差の 3 次のモーメントが負にならなければならないという条件が必要である。<sup>5</sup>

このように、特に確率的生産フロンティアモデルの下で技術非効率が観測されるためには、生産性のデータが一定の統計的な性質を保有していなければならない。しかし、X 非効率の理論では X 非効率が存在する場合には、存在しない場合に比べて生産性の低下が見られると説明しているだけで、なんらの統計的な定性的性質をも言及していない。したがって、もし X 非効率によって生産性の散らばりが発生したとしても、その散らばりが技術非効率として観測されることは保証されない。

たとえば、経営管理非効率モデルでは、非効率が半正規分布をなす場合を示した。モデルで仮定したメカニズムが働くためには、第一にフロンティアから乖離しようとする傾向、第二に乖離した生産性がフロンティアに戻るメカニズム、第三にエルゴート性が必要である。最後のエルゴート性の条件は、一つの事業所内の非効率生成メカニズムを、多くの事業所の生産性を横断的に観測することによって認識することができるために必要な条件である。また、ヴィンテージ非効率モデルにおいては、第 1 の力は、拡大し続けるフロンティアから設備の陳腐化によって離れてしまう傾向、第 2 の力は、設備更新によってフロンティアの生産技術を体化する投資の効果に対応している。

このように、なんらかの非効率が技術非効率として観測されるためには、この 3 つの条件が必要である。そして、どの条件が欠けても、定常な分布をなす技術非効率を観測することはできない。たとえば、経営管理非効率モデルにおいて経営努力によるチェックメカニズムが働いていない場合には、すべての工程が状態 L となった時に、定常状態となる。この状態では、生産性は低い水準で安定化し、非対称分布による技術非効率を観測できない。しかしながら、発生している非効率はモデルの前提により、日和見的行動など発生原因で分類すると X 非効率である。このように、すべての X 非効率が技術非効率として観測でき

<sup>5</sup>COLS 法などのモーメント法で推計する場合だけでなく、最尤法で推計する場合にも必要である。COLS 法の場合には、非対称的技術非効率項の分散の推計値が得られないし、最尤法の場合には推計値が 0 になる。

るわけではない。最も極端な場合には、すべての事業所が同じ程度にX非効率であれば、生産性の分散さえも観測することはできない。この状況は、政府規制によって事業所の自由な経済的活動が制約を受けている場合には、十分考えられることである。

DEA等、フロンティア生産関数に特定の関数型や技術非効率に特定の分布を仮定しない場合にも、同様の状況を考えることができる。DEAの場合には確率的フロンティアモデルに比べて技術非効率が観測されるための条件は緩い。包絡面で定義される生産性より観測される生産性が低くなっていけば技術非効率が観測される。したがって、X非効率による生産性の低下があれば、DEAを用いるかぎり、技術非効率として観測される可能性が高い。しかし、DEAでは様々な原因による散らばりを含みやすいので、非効率の要因分析が重要になっており、かならずしもすべての散らばりをX非効率と判断するわけではない。要因分析では二つ以上の非効率の発生状況が比較される。そして、非効率の水準が競争圧力と負の相関を持っていると同定されるとき、X非効率が存在すると判断される。しかしながら次のような状況を考えてみよう。ある産業で、何らかの市場構造要因が変化して市場の競争圧力が低下し、X非効率が一般的に増大することによって、ほとんどの事業所で生産性が低下したとする。もし、フロンティアに近い事業所ほどそうしたX非効率の増大による生産性の低下を免れやすい傾向があるとしたら、DEAによって技術非効率の増大が観測される。このとき、競争圧力と非効率水準は負の相関を持つため、X非効率が存在すると主張されるだろう。しかし、必ずしもそのような傾向があるとは限らない。もし、フロンティアに近い事業所ほど市場構造の変化にともなって生産性が大きく低下する傾向がある場合には、観測される技術非効率はかえって低下してしまう。すなわち、X非効率の増大による一般的な生産性の低下が、DEAによって技術非効率の増大とは観測される保証はない。

以上のように、X非効率が発生したとしても、その非効率が必ず技術非効率として観測されるとは限らない。3.1の議論とあわせると、X非効率ではない技術非効率も可能であるし、技術非効率としては観測されないX非効率も存在しうることになる。したがって、X非効率をその発生原因によって定義するかぎり、技術非効率が観測されることはX非効率が存在するための十分条件ではないし、必要条件でもない。一般に楽観的に考えられているように、技術非効率の存在はX非効率が存在することの証明にはならないのである。

## 4 観測すべきX非効率の定義

このように非合理的行動の結果として、すなわち原因においてX非効率を定義するかぎり、統計的に検証可能なX非効率を抽出することはできない。そのためもあって、新古典派ミクロ経済学とかみ合わない議論を抜け出すことはできない。ただし、原因で定義することは、ある非効率がX非効率であるか否かについては、明確な判断を下すことができる。それでは、反証可能なX非効率の定義を考えることができるだろうか。ないしは、計量分析によって検定することができるような定性的なX非効率の性質は考えられるだろうか。

ここまでに明らかになったことは、X非効率を原因によって定義してしまうかぎり、X非効率と計量的に観測される技術非効率との関係を確定させることはできないこと、また、非効率のうち、経営コストをかけたか、努力を行えば制御できるような非効率をも含むようにX非効率を定義してしまうと、合理性の相対性の問題を避けることはできず、論理の循環を避けることができないということ、である。したがって、この合理性の相対性の問題を避けるためには、「何らかの経営コストをかけることによって制御されているわけではない非効率」をX非効率と定義する方法を考えざるをえない。すなわち、非効率の水準に対しての制御可能性を否定し、

「何らかの経営努力によって、最適な水準になるように制御されることがない非効率」、

ないしは制御不能性 (uncontrollability) をもって観測すべきX非効率を定義するのである。

この定義は発生要因について言及しているわけではないから、今までの議論と同様にX非効率の源泉は企業の内部組織の問題として発生することを認めている。しかし、それに限定しているわけではないから、ある種の資源配分上の非効率を原因とする非効率も含む。ただし、すべての非効率をX非効率とするのではなく、発生した非効率の存在が認識されておらず、最適な水準に制御されていないものだけをX非効率とする。存在が認識され、最適な水準にコントロールされている非効率はもはや「X」ではない非効率と考えるのである。

この定義では、経営管理非効率モデルにおいて分析されている非効率はX非効率とは考えない。すなわち非効率の水準が最適な水準に制御されているかぎり、その非効率を観測すべきX非効率とは考えない。またヴィンテージ非効率モデルにおいて、設備更新が最適に決定されている場合、やはりその技術非効率はX非効率に含めない。

ただし、制御不能と入っても、非効率の水準が固定されていると考えているわけではない。従来のX非効率の理論が論じてきたように、非効率の水準が市場の競争構造に影響を受けると言う意味では可変であることを認めている。市場の競争圧力が強いときには、競争圧力から隔離されているときに比べて、組織構成員の超自我の均衡水準が上昇し、より合理的に行動するので生産性が高まるだろう。競争圧力という経済環境を組織構成員が主観的にどう感じるかということ、もし経営者が、情報の公開を徹底するとかインセンティブを与えて学習を奨励する等コストをかけて影響を与えることができ、しかもコストに見合った最適水準まで構成員の超自我の水準を調整できるとしたら、その非効率はここで観測しようとするX非効率には含めない。一方、経営者が競争圧力による効率性の変化に注意を払わない場合、および経営者が経営努力を払っても組織構成員が主観的に感じる競争圧力の水準に影響を与えることがない場合には、観測される非効率をX非効率と考えるのである。

それでは、第1節で紹介した諸々の理由によって発生する非効率は、この制御不能性の定義によるX非効率に含まれるだろうか。実は、この定義では、必ずしもX非効率の理論で考えられている理由によって発生するすべての非効率を、X非効率に含めるわけではない。経営管理非効率モデルを考えよう。各工程が状態Hから状態Lに移行する理由は、囚人のジレンマに陥った場合も考えられるし、情性的行動が新しい経済環境に適合しなくなったのかもしれない。原因によらず、適切な経営管理によって非効率の水準が制御できると考えられるかぎり、ここでのX非効率とは考えないのであるから、発生している非効率はX非効率に含めない。非効率が存在することを証明できたとしても、その非効率が制御されている可能性が残るかぎり、新古典派の批判を免れることはできないのは再々述べているとおりである。すなわち、制御されている非効率の存在を証明しても、それがX非効率の存在証明となるわけではない。したがって、新古典派的には説明できないがX非効率の概念によって説明できる現象を同定するという目的のためには、第1節で考えられる理由によって発生するすべての非効率を、この定義に含まれるように保つ必要があるわけではないのである。

次に、観測される技術非効率が、この定義によるX非効率の性質を保有していると確認できたとき、その事実は通常用いられている意味のX非効率が存在することの証明になると考えられるかという命題を検討する。もし、X非効率を代表的な理論である第1節で紹介した発生事由によるものに限らなければならないとしたら、X非効率の存在を保証する事実とはならないかもしれない。第1節で紹介された以外のメカニズムで制御されない非効率が発生する可能性は大きい。また、ある種の資源配分非効率もこの定義のX非効率に含まれている。しかし、制御不能性の定義によるX非効率は、新古典派的モデルの中には存在しない非効率であることは確かではないだろうか。新古典派のモデルでは、すべて経済主体の利益に影響を与える経済変数は、戦略変数ないしは、他の戦略変数によって決まる内生変数として、考慮されなければならない。制御できない変数は、外生的に与えられる環境変数として扱われる。もし、X非効率が制御できない非効率性として発生すると、その水準は競争圧力などの市場構造変数によって影響を受け、しかも企業の利潤に重要な影響を与える。競争圧力は、相互依存行動など間接的に企業の市場行動によって定まるということ忘れてはならない。このような変数は、通常考えられるようにレジャーなどの要素を考

慮することによっても、企業の管理メカニズムを考えることによっても、通常の新古典派的なモデルの中に組み込むことはできない。すなわち、新古典派的には説明できないが X 非効率の理論では説明できる非効率である。

## 5 技術非効率に仮定される種々の分布型

本節からは、技術非効率の水準を確率的フロンティア関数モデルを用いて推計するために検討しておくなければならない論点として、特に技術非効率に仮定する分布型について議論する。分布型に対する仮定は、推定される技術非効率の水準に大きく影響するから重要であるというだけではない。技術非効率の発生メカニズムに関する情報は、実証的に得られる非効率項の中にこそ存在している。ここで示されるように、非効率項の分布型を特定するという事は、その発生メカニズムを求めるということに等しい。第4節で示したように、X 非効率を「最適には制御されていない非効率」とよりオペレーショナルに定義することにより、その定義による X 非効率の存在を統計的に同定できる可能性がある。分布型のもつ統計的性質を検証することによって、この検定を実行できることを以下で説明する。

残念ながら、現実的に観測される投入・産出のデータセットから技術非効率を同定しようとする計量経済学研究者は、技術非効率の分布関数の仮定に対しては驚くほど無頓着な態度をとってきた。技術非効率を計測する場合に、これまで多くの場合採用されてきた方法は最尤法である。最尤法を用いる場合には、推定値は仮定する分布によって大きな影響を受けることが知られているので、特に分布に対する仮定には注意を払わなければならない。この問題は、論文上でしばしば指摘されているにもかかわらず、明示的に分布型の適切性を議論した論文は非常に少ない。文献上若干存在する分布に対する議論は、理論的な整合性を考えているものではなく、サンプルとして採用した一つの産業における投入・産出のデータからフロンティア生産関数を推計し、分布の適合性を議論したものだけである。

確率的生産フロンティアモデル

$$y_i = f(x_i; \vec{\beta}) + v_i - u_i \quad (5)$$

における技術非効率の分布、すなわち  $u$  の分布に対して、これまでに様々な分布型を仮定することが提唱されている。もっとも多くの場合用いられているのは、半正規分布 (Half-Normal Distribution) と呼ばれている分布である。他に、指数分布 (Exponential Distribution)、ガンマ分布 (Gamma Distribution)、切断正規分布 (Truncated-Normal Distribution) などが提唱され、部分的に適用が試みられている。しかし、半正規分布と近年によく用いられるようになった切断正規分布以外には、これらの実証的適用は非常に限られたものとなっている。半正規分布は後に示すように切断正規分布の一つの特殊なケースである。したがって、切断正規分布以外にはほとんど実用的に用いられていないと言ってよい状態である。

この理由は、技術非効率を計測するために主に用いられている方法が最尤法であることによっている。技術非効率を伴ったフロンティア生産関数の計量モデル (5) を、最尤法によって推計しようとする場合、残差項  $v - u$  の分布を知らなければならない。この分布は  $v$  に仮定される正規分布と  $u$  に仮定されるなんらかの非対称分布とのたたみこみ (convolution) である。切断正規分布の場合には、このたたみこみ分布は誤差関数を用いて比較的分析が容易な形で記述できる。しかし、この他の分布の場合には、たたみこみ分布を求めることはそれほど容易ではない。<sup>6</sup> すなわち、これまで切断正規分布が採用されてきたのはもっぱら技術上の便宜的な理由であると言ってよい。

この節では以下、これまで非効率の記述に用いられてきた分布型を紹介する。

<sup>6</sup>たとえば、Stevenson [1980] ではガンマ分布が提唱されたが限定的な形でしか推計方法を示せなかった。10 年後に Greene [1990] が推計値を近似する方法を 2 通り問うた。

## 5.1 半正規分布

文献上もっとも数が多いのがこの分布である。多く採用されている理由は、正規分布と半正規分布のたたみこみ分布の取り扱いが容易であることによる。また、正規分布から導出される分布に対しての信頼感が直感的に存在することにもよるのだろう。しかしながら、ランダムな確率変数に正規分布を仮定することの正当性と、非対称な技術非効率の分布に半正規分布を仮定することの正当性には関係がない。ブラウン運動を行う確率変数の分布は正規分布に収束していくが、たとえ領域内に吸収壁や反射壁が存在したとしても、収束する分布はいくつかの正規分布のたたみこみ分布となるはずであるから、半正規分布に収束していくことはない。ただし、2.2 経営管理非効率モデルで示した様に、企業が非効率であればあるほどその非効率の水準に比例してフロンティアに回帰する傾向があるという確率過程を考えると、非効率の水準の漸近分布は半正規分布で近似される。さらに、半正規分布は、後に示すように、これまで提唱された分布の中で唯一、企業が合理的に最適な設備更新期間を選択したときにヴィンテージの分布として発生しうる分布と認められる分布である。他の分布は、最適な設備更新期間がどのように分布していたとしても、分布型が妥当な仮定であることを説明できない。

確率密度関数:

$$\frac{1}{\sigma_u} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}$$

正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  とのたたみこみ分布:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2(\sigma_u^2 + \sigma_v^2)}} \left( 1 - F \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \frac{\sigma_u}{\sigma_v} \right) \right) \quad (6)$$

対数尤度関数

$$N \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + N \ln \frac{1}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} + \sum_{i=1}^N \ln \left( 1 - F \left( \frac{\epsilon_i \sigma_u}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \sigma_v} \right) \right) - \frac{1}{2(\sigma_u^2 + \sigma_v^2)} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2$$

たたみこみ分布の2次モーメント:

$$\sigma_v^2 + \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2$$

たたみこみ分布の3次モーメント:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4 - \pi}{\pi} \sigma_u^3$$

たたみこみ分布の4次モーメント:

$$3\sigma_v^4 + 6 \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_v^2 \sigma_u^2 + \frac{3\pi^2 - 4\pi - 12}{\pi^2} \sigma_u^4$$

## 5.2 指数分布

半正規分布と並んでよく用いられている分布である。企業の非効率の水準によらず、一定の確率でフロンティアに回帰する傾向があるという確率過程を考えると、非効率の水準の漸近分布が指数分布になることを示すことができる。

確率密度関数:

$$\frac{e^{-\frac{u}{\eta}}}{\eta}$$

正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  とのたたみこみ分布:

$$\frac{1}{\eta} e^{-\frac{2\epsilon\eta + \sigma_v^2}{2\eta^2}} \left( 1 - F \left( \frac{\sigma_v^2 + \epsilon\eta}{\eta\sigma_v} \right) \right)$$

対数尤度関数

$$N \ln \frac{1}{\eta} + \frac{N\sigma_v^2}{2\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^N \epsilon_i + \sum_{i=1}^N \ln \left( 1 - F \left( \frac{\epsilon_i + \sigma_v^2}{\eta\sigma_v} \right) \right)$$

たたみこみ分布の2次モーメント:

$$\sigma_v^2 + \eta^2$$

たたみこみ分布の3次モーメント:

$$-2\eta^3$$

たたみこみ分布の4次モーメント:

$$3\sigma_v^4 + 6\sigma_v^2\eta^2 + 9\eta^4$$

### 5.3 ガンマ分布

以上半正規分布と指数分布の二つの分布が非効率の分布として、一般的に用いられている。Stevenson [1980] は、これらの分布が用いられる理由は、非対称な分布であり、非効率の水準に対して単調減少であるという、すなわち非効率水準が0のところ分布のピークがあるという分布形状の特質にあるに過ぎないとした。<sup>7</sup> 彼は、人間の行動として、必ずしも非効率水準が0のところピークを持つ、すなわち効率的行動がもっとも確からしくなければならないという理由はない、と主張した。Stevenson が半正規分布などに代わる分布としてあげたのは、モードが0でないガンマ分布と切断正規分布である。どちらの分布とも、分散の大きさと分布の形状に関する二つのパラメータを持っている。分散の大きさという一つの自由度しか持たない半正規分布や指数分布に比べ、自由度が大きいので実際の分布と適合する可能性は高く、技術非効率を記述する分布として期待されてきた。しかし、ガンマ分布の場合、形状パラメータが特定の整数値を取るとき以外は取り扱いが困難になり、実証的な分析にはなかなか用いられてこなかった。なおガンマ分布は形状パラメータ  $m = 0$  の時には、指数分布に一致する。すなわち、指数分布を拡張した分布と考えることもできる。

ガンマ分布は、ポアソン分布をなす事象の間隔の分布として知られる。しかし、半正規分布や指数分布が比較的単純な確率過程の漸近分布として説明できることに比べると、ガンマ分布が発生する根拠となる確率過程を見出すのは難しい。ただし、自然現象には、降水量等、ガンマ分布をなすと考えられているものがあるので、産業内の市場構造の動学的メカニズムの結果というよりも、単にそういった自然資源に大きく依存して産業のパフォーマンスが決定される場合、その産業のパフォーマンスがガンマ分布をなすことは十分に考えられる。<sup>8</sup> しかし、本書は製造業を対象としているので、このような特殊なケースを除外して考える。製造業について一般的に、なんらかのガンマ分布をなす自然現象が生産性に系統的に影響をあたえる可能性は、非常に小さい。

確率密度関数:

$$\frac{u^m}{\Gamma(m+1)\alpha^{m+1}} e^{-\frac{u}{\alpha}}$$

正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  とのたたみこみ分布:

$$\frac{\sigma_v^m e^{-\frac{(\epsilon\alpha + \sigma_v^2)^2}{2\sigma_v^2\alpha^2}}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(m+1)\alpha^{m+1}} \int_{\frac{\epsilon\alpha + \sigma_v^2}{\sigma_v\alpha}}^{\infty} \left( t - \frac{\epsilon\alpha + \sigma_v^2}{\sigma_v\alpha} \right)^m e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

たたみこみ分布の2次モーメント:

$$\sigma_v^2 + (m+1)\alpha^2$$

<sup>7</sup>すなわち、非効率=0の水準にモード(最頻値)があるということ。

<sup>8</sup>Teigen, L.D. and Milton Thomas [1995] を参照せよ。

たたみこみ分布の3次モーメント:

$$-2(m+1)\alpha^3$$

たたみこみ分布の4次モーメント:

$$3\sigma_v^4 + 6(m+1)\sigma_v^2\alpha^2 + 3(m+1)(m+3)\alpha^4$$

## 5.4 切断正規分布

ガンマ分布と同じように、Stevenson [1980] によって提唱された分布である。切断正規分布は半正規分布を一般化している。形状パラメータ（どこで切断するか）と分散の大きさを示すパラメータの二つを持っている。ガンマ分布に比べて計量的な処理が容易で、正規分布との種々のたたみこみ分布を比較的簡単に計算することができる。この性質から、近年応用研究が増加している。しかし、切断正規分布はガンマ分布に比べるとさらに根拠に乏しい分布である。マルチメディアへのアクセスの分布などにまれに使用されているケースがあるが、本来正規分布をなすと考えられる事象のうち、法制度上の制約などによって、特定の部分が市場に出現しないなどの特殊な場合に適合されるだけである。

確率密度関数:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u \left(1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right)} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma_u^2}}$$

正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  とのたたみこみ分布:

$$\frac{e^{-\frac{(\epsilon+\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)} \left(1 - F\left(\frac{\sigma(\epsilon\sigma_u^2 - \mu\sigma_v^2)}{2\sigma_u\sigma_v}\right)\right)$$

対数尤度関数

$$-\frac{N}{2} \ln 2\pi - N \ln \sigma - \sum_{i=1}^N \frac{(\epsilon_i + \mu)^2}{2\sigma^2} - N \ln \left(1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right) + \sum_{i=1}^N \ln \left(1 - F\left(\frac{\sigma(\epsilon_i\sigma_u^2 - \mu\sigma_v^2)}{2\sigma_u\sigma_v}\right)\right)$$

たたみこみ分布の2次モーメント:

$$\sigma_v^2 + (1 - K^2)\sigma_u^2 - \mu\sigma_u K$$

たたみこみ分布の3次モーメント:

$$-K\sigma_u(\mu^2 + 3K\mu\sigma_u + \sigma_u^2(-1 + 2K^2))$$

たたみこみ分布の4次モーメント:

$$-K\mu\sigma_u(\mu^2 + 4K\mu\sigma_u + 3\sigma_u^2(1 + 2K^2) + 6\sigma_v^2) + \sigma_u^4(3 - 2K^2 - 3K^4) + 3\sigma_v^2(2\sigma_u^2(1 - K^2) + \sigma_v^2)$$

ただし、

$$K \equiv \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_u^2}}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right)}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

である。  $\mu = 0$  の時、  $K = \sqrt{2/\pi}$  となり、それぞれのモーメントは半正規分布の場合に一致している。

## 6 X 非効率の存在を検定するためのヴィンテージモデル

前節で紹介したように、技術非効率に関わる検定としては、技術非効率の存在検定という方法しかとられてこなかった。これらの検定は、非効率に影響される残差の分布を任意な形で特定し、その分布パラメータの値についての検定を行う非常に限られた方法であった。残差の分布の特定を恣意的に行わないためには、非効率の発生メカニズムについての考察が不可欠である。この考察が行われないうちに、観測している非効率が X 非効率であるか否かを議論することはできない。これまで、非効率の発生メカニズムが議論されることは無かった。そのため、観測される技術非効率の中に X 非効率を同定できるかどうかという検定に、直接用いることのできる方法も提示されてこなかった。

まず、本節では、フロンティアモデルで非対称な分布を持つ非効率が観測されるのかというメカニズムを、明示的に導入したモデルを提示し、X 非効率の存在を検定するための準備を行う。ここでは、第 2 節で X 非効率と技術非効率との関係を明らかにするために用いた、ヴィンテージ非効率モデルを発展させて、技術非効率の発生メカニズムを記述する方法、および技術非効率を表す適切な分布型について考察する。ヴィンテージモデルの特徴は、市場構造の決定メカニズムを持つ動学的モデルであるということである。この特徴は、DFA に典型的に見られるように、一般には個々のサンプルの生産性は時間に関して安定的なものとして捉えられていることと対照的である。ここで安定的とは、個々のサンプルの技術非効率の水準は、所与の値として体系外から与えられたものであり、時間によって変化しないという考え方を言う。この意味で、技術非効率の考え方は、これまですこぶる静態的であった。最初にパネル・データを用いて技術非効率の水準を推計した Schmidt and Sickles [1984] では、技術非効率を含んだ計量モデルは、

$$y_{it} = \alpha + \beta' x_{it} + v_{it} - u_i$$

と定式化されていた。すなわち、生産関数はどの期においても同一であるし、技術非効率の水準はそれぞれのサンプルに固有の値  $u_i$  を取り、時間によって変化しないとした。後者の仮定は、Cornwell, Schmidt and Sickles [1990] において緩和され、

$$\alpha - u_i = \theta_{i1} + \theta_{i2}t + \theta_{i3}t^2$$

として、技術非効率の水準が時間によって緩やかに変化する可能性も認められた。しかし、どちらにおいても、技術非効率は体系外から所与の値として与えられる、その変化も体系外から与えられたものという考え方に即したものとなっている。これは、観測される技術非効率が根拠も無く X 非効率としてとらえられ、技術非効率の発生メカニズムを考慮することが避けられてきたことによる。

しかしながら、技術非効率の発生メカニズムを考慮した計量分析が無かったというわけではない。特定産業の生産関数推計を丁寧を試みてきた研究の中に、技術非効率の発生メカニズムをヴィンテージモデルでとらえるアプローチをとってきたものがある。代表は、Putty-Clay Approach に立脚する Førsund and Hjalmarsson [1987] の研究である。同著では、各事業所の生産性はその事業所が設立された時点での技術を反映したものであると仮定し、明示的なヴィンテージ構造を持ったモデルが作成している。より新しく建設された機械設備はそれだけ高い生産性を示すと仮定されているので、すべてなんらかの設備・装置として体化された技術は、現時点のフロンティア技術に比べて陳腐化していくことを避け得ない。このような技術進歩が組み込まれているヴィンテージモデルにおいては、技術非効率の水準は、建設された後絶えず変化するものとしてとらえられている。

また、Caves and Barton [1990] では同様の問題意識から、技術非効率の発生をとらえている。彼らが検討した問題は、産業の市場構造が寡占的になると、設備の更新 ( Turnover ) が競争圧力の欠如のために鈍ってしまい、陳腐化された技術が採用され続け、生産力の低下をきたすかと命題であった。実際、1980 年代の米国製造業の沈滞の原因は、こうした市場構造を原因とする生産力の低下であるという危惧を示す

論調は少なくなかった。こうした問題意識においても、すこぶる動的に一つの産業の技術非効率の構造がとらえられているのは明らかである。

以下では、技術非効率を、あくまでダイナミックに変化する市場構造のあらわれとして分析するために、動学的な枠組みの中で発生メカニズムをとらえることを試みる。計量分析において使用する技術非効率の分布に対する仮定について、X 非効率の動学的発生メカニズムを根拠とすることができるかどうかを問うためである。

動学的メカニズムを持ったモデルは、必ずしもヴィンテージモデルには限られない。この他にも、技術非効率の発生メカニズムを内生的に持ったモデルを考えることは十分可能である。ここでは、Førsund and Hjalmarsson の研究の流れに即して、ヴィンテージモデルの中にどれだけ非効率の分布型に対する情報が含まれているかを分析する。

#### 制御された設備更新期間の下で発生する技術非効率 (調整コストを考慮しない場合)

基本的な設定は、ヴィンテージ非効率モデル I と同じである。すなわち、ある産業において生産技術が Hicks 中立的に一定の生産性成長率  $\alpha$  で進歩している。賃金率、利率は一定であるので最適な資本労働比率も一定であり、すべての事業所は最適資本労働比率に即した設備を建設している。設備を更新すれば、その時点での最も新しい性能の設備、すなわち効率性を獲得できるが、次に設備を更新するまではその生産性が維持される。 $t_i$  を  $i$  番目の事業所の建設年度とすると、時点  $\tau$  におけるフロンティア技術に対する効率性は、生産関数を対数表示すると、フロンティア技術を 0 として、 $\alpha(t_i - \tau) < 0$  となる。この状態を「非効率性が  $\alpha(t_i - \tau) > 0$  である」と呼ぶ。

2.1 で説明したように、最適な設備更新期間は、設備更新費用、割引率、供給量、技術進歩率の関数として与えられる。このうち割引率と技術進歩率はすべての事業所にわたって共通であると考えることができる。2.1 では、供給量と設備更新費用も各事業所について同一であると仮定したが、一般的には事業所によって異なるであろう。したがって、最適な設備更新期間も一般に事業所によって異なる。 $i$  事業所の設備更新期間を  $z_i$  とおくと、この事業所は非効率性が  $\alpha z_i$  の水準となったときに、定期的に設備更新を行う。その設備更新の時点で非効率性が 0 になり、単位時間あたり  $\alpha$  の割合で非効率が増大していく。したがって、もしすべての事業所が同じ設備更新期間  $Z$  を持ち、しかも各事業所の設備更新の初期時点が均一でランダムであるとする、ある任意の時点で任意の事業所を選んだとき、その事業所の非効率の水準を確率変数と考えると、その確率密度関数  $\psi(x)$  は、

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha Z} & (\text{for } 0 \leq x \leq \alpha Z) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

という一様分布となる。同様に、各事業所の設備更新期間の分布密度が  $\phi(z)dz$  によって表されるとすれば、やはり設備更新の初期時点がランダムであるという条件の下で、ランダムに選択した事業所の非効率の水準は

$$\psi(x) = \int_{\frac{x}{\alpha}}^{\infty} \frac{\phi(z)}{\alpha z} dz \quad (7)$$

という確率密度関数によって表される。フロンティア生産関数の方法を用いることにより、この  $\psi(x)$  にしたがう技術非効率が観測されるはずである。たとえば

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{a-b} & (\text{for } b \leq z \leq a) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と、各事業所にとっての最適な設備更新期間が一様分布をなしている場合には、非効率の分布は、

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(a-b)} \log\left(\frac{a}{b}\right) & (0 \leq x < b) \\ \frac{1}{\alpha(a-b)} \log\left(\frac{a}{x}\right) & (b \leq x < a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

と歪みのある分布となる。

もし、実際に観測される技術非効率がこのようなメカニズムで発生したものであるとすれば、その技術非効率は、 $X$  非効率を第 4 節で定義したように「最適に制御されていない非効率」とするがぎり、 $X$  非効率ではない。なぜなら、観測される非効率は、あくまで各事業所が設備更新を最適な水準に調整した結果発生した技術非効率であるからである。

#### 制御された設備更新期間の下で発生する技術非効率（調整コストを考慮した場合）

新古典派的な  $X$  非効率の解釈に即してヴィンテージモデルを構成するためには、モデルをもっと一般に設定しなければならない。新古典派的な解釈における最適化行動では、必ずしも最適な状態がすべての経済主体によって達成されるわけではなく、最適化のためのコストを考慮してどの程度最適な行動に近づくかを決定する。各事業所が各々の最適設備更新期間を正確に知り、その期日どおり設備更新を遂行するためにはコストがかかるだろう。各事業所はそのためのコストと設備更新をより最適に行うことによる利益を比較勘案し、どの程度まで正確に最適な設備更新期間にしたがうかを決定する、という状況を考えなければならない。以下では、各事業所がこのような意味での最適化行動をとる状況を記述することを試みる。

まず、まったく経営努力を払わず、各事業所がランダムに設備更新期間を選択したとするとどのような設備更新期間の分布となるかを考え、その確率密度を  $\xi(z)$  とする。さらに、このランダムに選択された設備更新期間  $z$  から、経営努力によって設備更新期間はより最適な方向へ修正されるとし、修正された結果どのような設備更新期間が選択されるかを、変換関数  $\zeta(w-z|z)$  で示す。ここで、 $z$  は、調整される前の設備更新期間、 $w$  は調整された後の設備更新期間であり、 $\zeta$  は所与の事前的な値の  $z$  について、 $w-z$  だけ更新期間が調整された後、 $w$  になる確率密度を示す。もし、すべての事業所が同一の最適な設備更新期間  $w_0$  を持ち、修正の結果この最適更新期間が実現されるとすれば、 $\zeta(w-z|z) = \delta(w_0 - z)$  となる。ただし、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である。また、すべての事業所にとって最適設備更新期間が同一でなくとも、 $w$  と  $z$  とが 1 対 1 に対応していれば、やはり変換関数はデルタ関数となる。これは、経営努力をまったく払わない初期に同じ設備更新期間を選ぶ事業所は、まったく同じような修正を行う場合を示す。一般には、変換関数は必ずしもデルタ関数となる必要は無い。なぜなら、各事業所が最適な設備更新期間に従おうとする場合に必要費用は、事業所によって異なるだろう。したがって、どの程度最適な設備更新期間に調整されるかは、事業所によって異なると思われるからである。

#### 設備更新決定における経営努力を示す変換関数の特徴

変換関数が満たさなければならない条件は、第 1 に

$$\int_0^{\infty} \zeta(w-z|z) dw = 1$$

である。その他に関数  $\xi(z)$  と  $\zeta(w-z|z)$  とに先験的に与えられる制約はほとんど無く、かなり一般的な関数型が適用可能と思われる。しかし、最適な設備更新期間として更新期間が 0、すなわち不断に最新設備に更新することが最適である可能性は、設備更新に正値をとる費用がかかると考えられる以上、存在し得ないと考えられるので、

- i)  $\zeta(w-z|z) = 0$  for  $z \geq 0$  and  $w = 0$ ,
- ii)  $z = 0$  の近傍で、 $\zeta(w-z|z) = 0$  for  $w-z < 0$ ,
- iii)  $\xi(0)$  は 有界、

という制約を満たさなければならない。

まず、i) は、更新期間が調整後も 0 にとどまる可能性は無いことを意味している。まず、事前的な設備更新期間が正の場合には、最適設備更新期間はすべての事業所について正であるので、修正後 0 に調整さ

れることは無い。また、事前的な設備更新期間が 0 であったとしても、調整のためのコストは有限であるうから、少なくとも微量は更新期間が増大し、修正された後もそのまま更新期間が 0 にとどまる可能性は無い。次に、ii) は、やはり最適設備更新期間はすべての事業所について正であるので、事前的更新期間が十分小さいかぎり、さらに小さく 0 により近い値に値に調整されることは無いことを示している。さらに、iii) は、経営努力無しに選択される設備更新期間が 0 になることまでは否定しないが、0 の近傍にある確率は、近傍を十分小さく取ることにより、0 にいくらでも小さい値を取ることができることを示している。すなわち、修正前であっても、 $z = 0$  という選択を行う事業者が常に存在するということが無いと仮定している。いくら経営努力をまったく払わない状態であったとしても、 $z = 0$  という選択は明らかに非合理であるとわかるので、どのようなケースであっても必ずこのような事業者が存在するという可能性は十分否定できると思われる。

この修正過程によって、設備更新期間の確率密度は  $\xi(z)$  から、

$$\phi(w) = \int_0^{\infty} \zeta(w-z|z)\xi(z)dz$$

に変換される。したがって、非効率の水準を示す確率密度関数は

$$\psi(x) = \int_{\frac{x}{\alpha}}^{\infty} \frac{\phi(w)}{\alpha w} dw = \int_{\frac{x}{\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\alpha w} \left( \int_0^{\infty} \zeta(w-z|z)\xi(z)dz \right) dw \quad (8)$$

である。この式の形で表現される技術非効率は、制御された非効率と考えられるので、X 非効率ではない。さらに、上述の特徴 i) ii) が認められると、 $z = 0$  の近傍では、調整後の設備更新期間の確率密度関数は、

$$\phi(w) = \int_0^w \zeta(w-z|z)\xi(z)dz \quad (9)$$

によってあらわされることになる。

#### 制御された非効率の分布密度関数

それでは、このようなメカニズムで発生した非効率は確率分布としてどういう特徴を持っているだろうか。式 (8) は、かなり一般的な式であるので、任意の関数が与えられた場合、多くは (8) の形に表現することができる。そのため、(8) の形の式で表現できるか否かによって、発生メカニズムにおいて制御されているのか否かを判別するのは容易ではない。それでも、設備更新期間と、(8) で表現される非効率の確率密度関数とに対して、次の特徴をあげることができる。

- iv)  $\phi(0) = 0, \phi'(0) = \xi(0|0)\zeta(0) = 0,$
- v)  $\psi'(x) \leq 0,$
- vi)  $\psi'(0) = 0$

まず、(9) に 0 を直接代入することにより、iv) の前半を得る。次に、(9) の両辺を  $w$  で微分することにより、

$$\phi'(w) = \xi(0|w)\zeta(w) + \int_0^w \frac{\partial}{\partial w} \zeta(w-z|z)\xi(z)dz$$

となる。この式の両辺に  $w = 0$  を代入することにより、i) iii) とあわせて iv) の後半を得る。また、 $\phi(w)$  は確率密度関数であるから、 $\phi(w) \geq 0$  でなければならない。したがって、(8) の左側の式と、中央の式を  $x$  で微分することにより、 $\psi'(x) = -\phi(x/\alpha)/x \leq 0$  となり v) を得る。さらに、この微分した式の両辺において  $x$  が 0 の極限をとることによって、

$$\psi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{\alpha}\phi'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{1} = -\frac{\phi'(0)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\zeta(0|0)\xi(0)$$

となり、iv) の後半より vi) を得る。

## 制御された非効率を同定する方法

残念ながら、確率的フロンティア生産関数の方法をとるかぎり、フロンティアからの乖離として観測されるのは対称的誤差項とのたたみこみ ( $u + v$ ) であるので、 $u$  の分布についての特徴、特に  $v$  (vi) を直接検証するわけにはゆかない。モーメント法を用いる場合でも、最尤法を用いる場合でも、関数形を特定しないかぎり、ないしはどちらかの分布のパラメータが先験的に与えられていないかぎり、たたみこまれた分布を  $u$  と  $v$  の分布に分離することはできない。

そこで、ここでは次の方法をとる。まず、これまでに非効率の分布として提唱されている分布形のうち、パラメータの値によらず  $v$  (vi) を満たさない分布型を棄却する。たとえば、分布型  $\alpha$  が  $v$  (vi) を満たさないとする。これは、各事業所の設備更新期間がたとえどのような分布をしていても、分布型  $\alpha$  をとることはありえないということを意味する。したがって、先験的に分布型  $\alpha$  を仮定するということは、観測される技術非効率は最適に制御された非効率ではありえないと、最初から仮定してしまうことと同じである。したがって、 $X$  非効率が分布型  $\alpha$  を形成するように発生するメカニズムの説明が伴わないかぎり、先験的に分布型  $\alpha$  を仮定するのは、 $X$  非効率を同定するというここでの目的には適切ではない。

つぎに、 $v$  (vi) を満たす分布型を拡張し一般化した分布型  $\beta$  を作成する。この一般化した分布型  $\beta$  は、設定により、パラメータがある条件を満たす場合には  $v$  (vi) を満たすが、必ずしも常に  $v$  (vi) を満たすとはかぎらない。もし、発生している技術非効率がヴィンテージモデル II で記述できる「制御された非効率」であるなら、観測されるパラメータは  $v$  (vi) を満たすものとなっているだろう。逆に、もし「制御されていない非効率」であるとするなら、観測されるパラメータは必ずしも  $v$  (vi) を満たすものでなければならないわけではない。

そこで、一般化した分布型  $\beta$  において、 $v$  (vi) を満たすパラメータの領域を特定する。この領域を帰無仮説とし、補集合を対立仮説として検定を行なう。もし、帰無仮説が適切な有意度の下で棄却されたとしたら、観測される技術非効率の分布が、合理的な意思決定の結果選択された設備更新期間の分布にしたがって発生したものであるという仮説は、選択されないということになる。すなわち、非効率が制御されたものではなく、 $X$  非効率が発生しているという仮説を支持する結果であるということがわかる。逆に、帰無仮説が棄却されないとしたら、観測される技術非効率は合理的な設備更新期間の選択結果によるという仮説を否定できない、すなわち、技術非効率ではあっても必ずしも  $X$  非効率とは言えないという仮説を支持することとなる。

このようにして、「観測される技術非効率が、制御された非効率であるというわけではない」という仮説を検定することができる。

### 4つの分布型の検討

まず、第5節で紹介した4つの分布型が  $v$  (vi) を満たすかどうかを検討する。ただし、以下では、分布密度関数を  $\psi(u)$  としている。

#### (a) 半正規分布

$$\psi'(u) = -\frac{2u}{\sigma_u^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) \leq 0 \text{ であり、} v \text{ を満たす。また、} \psi'(0) = 0 \text{ であるので vi) も満たす。}$$

#### (b) 指数分布

$$\psi'(u) = -\exp\left(-\frac{u}{\eta}\right)/\eta^2 < 0 \text{ であり、} v \text{ を満たす。また、} \psi'(0) = -1/\eta^2 \text{ であるので vi) は満たさない。}$$

#### (c) ガンマ分布

$$\psi'(u) = \frac{u^{m-1}}{\Gamma(m+1)\alpha^{m+1}} \left(m - \frac{u}{\alpha}\right) e^{-\frac{u}{\alpha}}$$

であり、 $m \leq 0$  でないかぎり、 $u \geq 0$  において正となる、すなわち、v) を満たさない領域が存在する。また、

$$\psi'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{m u^{m-1}}{\Gamma(m+1)\alpha^{m+1}}$$

であるので、 $m < 0$  では無限大に発散するので vi) は満たされない。

(d) 切断正規分布

$$\psi'(u) = -\frac{u - \mu}{\sqrt{2\pi}\sigma_u^3 \left(1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right)} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma_u^2}}$$

であり、 $\mu \leq 0$  でないかぎり、 $u \geq 0$  において正となる v) を満たさない領域が存在する。

$$\psi'(0) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma_u^3 \left(1 - F\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right)} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_u^2}}$$

であるので、 $\mu = 0$  でないかぎり、vi) は満たされない。 $\mu = 0$  のケースは半正規分布に他ならない。

以上のように、半正規分布は v) vi) とも満たし、指数分布は vi) を満たさない。ガンマ分布はパラメータの値によって、v) vi) のどちらかを満たさない。切断正規分布は、半正規分布となる場合をのぞき、vi) が満たされない。すなわち、v) vi) とも満たすのは半正規分布の場合だけである。

ところで、式 (7) の両辺を  $x$  で微分することにより、

$$\phi(w) = -\alpha^2 w \psi'(\alpha w)$$

という、それぞれの技術非効率の分布  $\psi(x)$  に対応する、設備更新期間  $\phi(w)$  の分布を求めるための関係式を得ることができる。たとえば、技術非効率が半正規分布をなすと仮定するのは、設備更新期間の分布の確率密度が、

$$\phi(w) = -\alpha^2 w \psi'(\alpha w) = \frac{\alpha^3 w^2}{\sigma_u^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 w^2}{\sigma_u^2}\right) \quad (10)$$

であると仮定することと等しいことがわかる。各事業所の合理的な選択の結果、設備更新期間がこの分布型となれば、技術非効率は半正規分布を示すことになる。すなわち、半正規分布をなす技術非効率は、各事業所が設備更新期間について合理的な選択を行った結果生じる非効率のパターンとして解釈することが可能である。ヴィンテージ非効率モデル II の範囲内では、半正規分布以外の分布を仮定する技術非効率モデルは、設備更新期間の決定が非合理的に行われていると仮定していることになる。

図 4.1a は、このようにして求めた、技術非効率が半正規分布をなすための設備更新期間の分布の例を示している。技術非効率が半正規分布をなすと仮定することは、設備更新期間が図に示されたような対称型分布に近い分布型をなすと仮定することに等しい。この場合、v) も vi) も満たされていた。

一方で、もし技術非効率が vi) を満たさない  $m = -1/2$  となるガンマ分布をなすと仮定すると、設備更新期間は図 4.1b のような形状の分布をなすことになる。非対称な分布であり、0 にモードを持ち、かつ尾が非常に長いという特徴がある。すなわち、一部の事業所はフロンティア技術による高い生産性を不断に追い求めている一方で、ほとんど設備更新を行わない生産性の低い事業所も淘汰されずに残っている産業である。ここで示した方法では、各事業所が合理的な意思決定をしているかぎり、設備更新期間はこのような分布をすることはないとする。すなわち、このような産業に X 非効率が存在すると考えて、X 非効率の検定を行うのである。

図 4.1a : 技術非効率率が半正規分布をなす場合の、設備更新期間の分布の例

図 4.1b : 技術非効率率が  $m = -1/2$  のガンマ分布をなす場合の設備更新期間の分布の例

### 半正規分布の拡張

次に、可能性の残る半正規分布を拡張し、一般化する。一般化の方向には

$$\psi(u) = C \exp\left(-\frac{(u-\mu)^{1+p}}{K}\right) \quad (\text{ただし、} p < 0 \text{ の場合には } \mu < 0)$$

という式における、パラメータ  $p$  と  $\mu$  の導入に表される 2 通りの方向がある。パラメータ  $p$  は、指数分布などを含む方向への一般化を示し、パラメータ  $\mu$  は、切断正規分布を含む方向への一般化を示している。ただし、検定においては必ずしもこの両方向に対する一般化を検討する必要は無い。なぜなら、まず

$$\psi'(0) = -\frac{C(1+p)(-\mu)^p}{K} \exp\left(-\frac{(-\mu)^{1+p}}{K}\right)$$

であるから、 $\mu \neq 0$  の時には vi) が満たされない。さらに、 $\mu = 0$  のとき、

$$\psi'(u) = -\frac{C(1+p)u^p}{K} \exp\left(-\frac{u^{1+p}}{K}\right)$$

であるから、正の値のすべての  $u$  について v) は満たされるが、vi) を満たすためには  $p > 0$  である必要がある。すなわち、v) vi) を満たすのは  $p > 0$   $\mu = 0$  の場合だけである。したがって、X 非効率率の存在検定は、設備更新期間が合理的に決定されるとする  $H_0: p > 0, \mu = 0$  を帰無仮説とする検定によって行われることになる。

この時、対立仮説をパラメータ  $p$  について一般化した分布

$$\psi(u) = C \exp\left(-\frac{u^{1+p}}{K}\right) \quad (11)$$

において考えれば、 $p \leq 0 (\mu = 0)$  が対立仮説  $H_1$  となる。ここで、さらに切断正規分布を含む方向へ一般化して考えても、合理的な決定の結果として説明付けられるのは  $\mu = 0$  の場合だけなのであるから、帰無仮説は  $H_0$  のまま変わらない。単に、対立仮説が  $H_2: p \leq 0 \wedge \mu \neq 0$  と領域が拡大するだけである。このため、帰無仮説を対立仮説  $H_1$  に対して棄却できれば、 $H_2$  は  $H_1$  を包含しているので、帰無仮説はそのまま  $H_2$  に対しても棄却されることが可能となる。したがって、帰無仮説  $p > 0$  が、技術非効率率の分布型 (11) において、対立仮説  $p \leq 0$  に対して検定が行なわれる。<sup>9</sup>

分布 (11) は、 $p = 1$  の場合として半正規分布を含んでいるのみならず、 $p = 0$  のケースとして指数分布をも含んでいる。また、非効率率の分布の確率密度関数  $\psi(u)$  に (11) を仮定するということは、調整後の設備更新時期の密度関数  $\phi(w)$  として、

$$\phi(w) = -\alpha^2 w \psi'(\alpha w) = C' w^{1+p} \exp\left(-\frac{(\alpha w)^{1+p}}{K}\right) \quad (C' \text{ は定数}) \quad (12)$$

を仮定することと等しい。

### 分布 (11) をなす技術非効率率を仮定する経済的意味

分布 (11) を仮定するメリットは、観測される技術非効率率の発生メカニズムについて「最適に制御された結果である」可能性があるものであるかどうかについての仮説を検定することができるということにとどまらない。ヴィンテージ非効率率モデルにおいて、 $p$  という値のより具体的な意味付けを求めることがで

<sup>9</sup>実際に、切断正規分布を半正規分布を一般化した状況と捉えても、後の検定は実際には同一の形となる。詳細は、注 13 を参照されたい。

きる。  $p$  は事業所が設備更新を行なう可能性が、その事業所の非効率の水準の何乗に比例しているかという傾向を示している。たとえば、半正規分布は  $p = 1$  のケースであるので、事業所が設備更新を行なう確率が非効率の水準に比例して増大する傾向にある時に発生し、指数分布は  $p = 0$  のケースであるので、同確率が非効率の水準に関係無く一定であるときに発生することを示している。指数分布と半正規分布は、技術非効率の分布として頻繁に用いられている代表的な分布である。これらの分布は、設備更新投資のインセンティブと非効率水準の関係のあり方に対応し、それぞれの動学的な市場構造決定メカニズムの結果として発生する分布としてとらえることができるのである。一方で、最適に制御されている可能性が無い  $p < 0$  のケースとは、非効率の水準が大きいほど設備更新が行なわれる確率が小さくなる場合である。

次に以上の命題、すなわち「パラメータ  $p$  は事業所が設備更新を行なう可能性が、その事業所の非効率の水準の何乗に比例しているかという傾向を示していること」を証明する。設備更新時期の密度関数が (12) で表されるとしたとき、任意に選ばれた非効率性  $x$  の事業所が、任意のある時点から  $\Delta t$  時間以内に設備を更新する確率を求めよう。まず、すでに非効率の水準が  $x$  にあるのだから、設備更新の間隔が  $x/\alpha$  以下である可能性は無い。また、設備更新期間が  $w$  である事業所を任意に選んだとき、その事業所の非効率の水準は  $[0, \alpha w]$  の領域に一様分布をなすので、その事業所の非効率の水準が  $[x, x + \Delta x]$  の領域に存在する確率は、 $\Delta x/(\alpha w)$  である。この確率は、設備更新期間が  $w$  であるという条件の下で非効率の水準が  $[x, x + \Delta x]$  の領域に存在する確率である。非効率の水準が  $[x, x + \Delta x]$  の領域に存在するという条件の下で、その事業所の設備更新期間が  $w$  である確率密度は、ベイズの定理により

$$\frac{\Delta x/(\alpha w) \cdot \phi(w)}{\int_{x/\alpha}^{\infty} \Delta x/(\alpha w') \cdot \phi(w') dw'} = \frac{\phi(w)/w}{\int_{x/\alpha}^{\infty} \phi(w')/w' dw'} = \frac{C' w^p \exp(-(\alpha w)^{1+p}/K)}{C'/(1+p) \cdot \exp(-x^{1+p}/K)}$$

となる。非効率の水準が  $x$  にあることを与えられていて、 $\Delta t$  以内の時間に設備更新が行なわれるためには、設備更新期間が  $[x/\alpha, x/\alpha + \Delta t]$  になければいけない。その確率は、

$$\frac{(x/\alpha)^p \exp(-x^{1+p}/K)}{1/(1+p) \cdot \exp(-x^{1+p}/K)} \Delta t = (1+p) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p \Delta t$$

である。このように、各事業所の設備更新のパターンを観察すると、非効率の水準の  $p$  乗に比例して設備更新が行なわれるように観測される。

この逆も成り立つ。すなわち、事業所の設備更新が、その事業所の効率性に依存して確率的に発生すると考えると、非効率の水準の確率密度関数は (11) となる。すなわち、補節において証明するように、ある時点で非効率性  $x$  の事業所が  $\Delta t$  時間以内に設備を更新する確率は  $\theta x^p \Delta t$  ( $\theta$  と  $p$  は定数) であるとする、非効率水準の確率密度関数は、

$$\rho(x; p) = \frac{(1+p)^{\frac{p}{1+p}} (\theta/\alpha)^{\frac{1}{1+p}}}{\Gamma(1/(p+1))} \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right) \quad (13)$$

となる。これは、(11) と同じ形である。(11) の分布に比べて、正規化されており、パラメータの解釈も容易なので、この分布を後に展開する検定などの作業に使用するモデルとし、仮に「指数冪乗型分布」と名付ける。指数冪乗型分布と正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  との畳み込み、 $v - u$  の分布の 2 次、3 次、4 次のモーメントの値等は補論を参照されたい。

以上のように、任意に選んだ事業所が設備更新を行なう可能性は、その事業所の非効率の水準の  $p$  乗に比例することが証明できる。 $p$  が正の値をとる場合には、非効率な事業所ほど設備更新を行なう可能性が高くなる傾向を示し、これは企業の合理的な意思決定と整合的になる可能性がある。たとえば、技術非効率率が半正規分布をなす  $p = 1$  のケースは設備更新が非効率水準に比例する場合であるが、設備更新期間の分布の確率密度が対称型分布に近い (10) で示されるときの合理的な調整の結果として解釈できることはすでに確認した。一方で、 $p$  が負の値をとる場合には、非効率な事業所ほど設備更新を行なう可能性が

えって低くなる傾向が示されることになる。この状態は、本節で議論したように、企業が各自の事業所の設備更新を最適な形で制御していると考えるかぎり、発現し得ない。したがって、第4節の定義にしたがえば、この技術非効率性は X 非効率性である。より非効率的な事業所ほど、設備更新によって節約できるコストというインセンティブは大きいはずだから、より設備更新を怠るのが合理的な意思決定の結果では無いということが、直感的にも明らかであろう。図 4.2 には、 $p = -0.5$  の場合の設備更新期間の分布関数の例が示されている。図 4.1b と同様に、非対称であり、0 に近いところにモードを持ち、かつ尾が非常に長い。ある一部の事業所はフロンティア技術による高い生産性を不断に追い求めている一方で、ほとんど設備更新を行わず、生産性の低い事業所が淘汰される傾向には無い。ここで定義した方法では、このような産業に X 非効率性が存在すると同定される。

図 4.2 : 技術非効率性が  $p=-0.5$  の指数冪乗分布をなす場合の設備更新期間の分布の例

### 対称な非効率分布と合理性

ところで、もし最も単純なケース、すなわち、各事業所ごとに特殊な費用要因が存在せず、したがって最適設備更新期間が同一であり、しかも、各事業所が合理的な意思決定をする場合には、どのような分布が観測できるだろうか。この結果は、上述の確率的設備更新過程モデルにおいては  $p \rightarrow \infty$  のケースにあたっている。2.1 において展開したヴィンテージ非効率モデル I において導出された最適設備更新期間 (1) によって与えられた値を  $W$  とする。すると、合理的な事業所は調整の結果すべて  $W$  を設備更新期間として選択するから、 $\phi(w) = \delta(W - w)$  となる。なお、対応する変換関数は  $\zeta(w - z|z) = \delta(W - z)$  である。したがって、非効率の水準を示す確率密度関数は

$$\psi(x) = \int_x^\infty \frac{\delta(W - w)}{w} dw = \begin{cases} \frac{1}{W} & \text{for } x < W \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

と一様分布である。これは、(13) において  $p \rightarrow \infty$  の場合に対応している。ただし、(13) においては設備更新確率を  $\theta x^p \Delta t$  と表したため、設備更新のタイミングが  $x = 1$  に固定されているが、この制約は、設備更新確率を  $\theta(x/a)^p \Delta t$  とすることによって、容易に拡張できる。

このことから、上述の確率的設備更新モデルも、合理的な設備更新行動を  $p \rightarrow \infty$  のケースとして含んでおり、非効率の分布は一様分布になることがわかる。 $x = 0$  を中心としないものの、一様分布 (14) は対称な分布であり、生産性において非対称な分布は発生しない。 $p$  が無限大になる場合に限らずとも、 $p$  がより大きい値を示すということは、産業内のより陳腐化した事業所の設備から更新されるという傾向が強いということを示すから、設備更新がより効率的に行われているということを示している。ただ効率性はこの  $p$  の値だけによって定まるわけではない。この他に、一般的に設備更新投資が行われる傾向、すなわち  $\theta$  の値と共に技術非効率の値が定まる。

この、「一様な費用構造の下で、同一の最適設備更新期間にしたがい、各事業所が合理的に設備更新投資をおこなう場合には非対称な非効率の分布は観測されない」という命題は重要な示唆を含んでいる。ある産業の事業所の生産性の成長を動的に考えると、フロンティア技術に比べると多少の技術の遅れがあることは必ずしも非効率の存在を示すとはかぎらない。観測する技術非効率にこのような X 非効率とは言えない非効率性が混入してしまうことが、これまで問題であった。ところがここで見たように、合理的な意思決定の結果発生している非効率性は、必ずしも非対称な分布をしているわけではない。もし合理的な意思決定の結果発生する非効率性が非対称な分布を持たないとすれば、技術非効率に非対称な分布を仮定して捉えようとする方法では、合理的な意思決定の結果発生している非効率は捕捉されないことになる。すなわち、やむを得ず発生する X 非効率とは考えられない非効率性を非効率として計量してしまうという問題を、回避することができる。

ただし、産業が急速に成長しており、事業所のヴィンテージの分布、すなわち建設年度の分布に歪みがある場合にはこの限りではない。ある産業で、合理的な意思決定の結果  $T$  年ごとに更新投資をおこなっているとすると、さらに、更新投資をおこなう事業所の  $a$  の割合の新規開設事業所が每期每期新規参入すると仮定する。この時、更新投資をおこなう事業所と新規開設事業所の数の合計は、毎年  $100a/T$  % の割合で増加する。したがって、長年の更新投資の結果、ヴィンテージ  $V$ （建設ないしは更新投資から  $V$  期間たっている）の事業所数の分布が連続的な分布で示されるようになっていていると仮定すると、ヴィンテージ  $V$  の事業所の密度分布は

$$\frac{ae^a}{T(e^a - 1)} e^{-\frac{V}{T}}, \text{ for } 0 \leq V \leq T$$

という指数分布の一部で示される。したがって、非効率の分布はフロンティアの技術進歩率を  $\alpha$  とすれば、同様に

$$\frac{ae^a}{\alpha T(e^a - 1)} e^{-\frac{x}{\alpha T}}, \text{ for } 0 \leq x \leq \alpha T$$

である。この分布の 2 次および 3 次のモーメントはそれぞれ、

$$T^2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{e^a}{(e^a - 1)^2} \right), \quad T^3 \left( \frac{2}{a^3} - \frac{e^a(e^a + 1)}{(e^a - 1)^3} \right) > 0$$

である。モーメント法を用いて技術非効率の水準を推計する場合には、このモーメントの推定量にしたがって非効率の水準が推計される。

## 7 X 非効率を検定する方法

前節では、観測される技術非効率  $X$  非効率と考えられる要因で発生している非効率か否かを判別する仮説をもたらししてくれるモデルを提示した。技術非効率の分布として、半正規分布を一般化した指数冪乗型分布、

$$\rho(x; p) = \frac{(1+p)^{\frac{p}{1+p}} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)} \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right)$$

を仮定する方法である。仮説： $p > 0$  が成り立てば合理的な最適化の結果として、技術非効率の分布をとらえることができるが、成り立たない場合には、制御された結果の非効率とは考えられず、 $X$  非効率の存在を示す現象と見ることができる。本節では、検定を実現する方法について考察する。

### 7.1 パラメータの値に依存しないモーメント間の関係

Lee[1983] による検定は、これまでで唯一の、技術非効率の分布を同定する方法に対する分析である。しかし、Lee によって用いられた分布の一般型としての Person 族の分布は、特殊な場合を除いて、指数冪乗分布も平方正規分布もどちらの分布も含んでいないので用いることはできない。Lee 以外が行なった、技術非効率の存在検定では、実際にはフロンティア生産関数からの乖離の正規性を検定していた。すなわち、乖離が単純な正規分布であり、技術非効率の仮説を必要としない、という帰無仮説を検定している。たとえば、Schmidt and Lin [1984] では、回帰残差の歪度を用いた検定を示唆している。もし、技術非効率  $\sigma_v$  が半正規分布をなすと仮定すると、歪度は、対称誤差項パラメータ  $\sigma_u$  と非対称技術非効率の分布パラメータ  $\sigma_v$  の関数として、

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4 - \pi}{\pi} \sigma_u^3 \left/ \left( \sigma_v^2 + \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right.$$

と表される。ところで、技術非効率が生じた場合にも、同様に

$$-\frac{2\eta^3}{(\sigma_v^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

という歪度を得る。半正規分布の場合にも指数分布の場合にも共に歪度は負の値をとるので、有意に負の値をとる歪度を観測するというだけでは、両者を区別することはできない。すなわち、これらの検定は、分布を特定できるほど強力ではない。分布を識別するためには、パラメータ  $\sigma_u, \sigma_v, \eta$  の値に対する情報が先験的に与えられていなければならない。

実は、この、「パラメータの値が先験的に与えられていないかぎり、対称的誤差項と非対称的技術非効率項を識別することはできない」という事実は、技術非効率の分布を特定する方法について、重要な示唆を含んでいる。すなわち、逆にこれらのパラメータに依存しない式を検定の対象とすれば、この問題を回避できるという可能性を示唆しているのである。たしかに、3次のモーメントまでを用いる場合には、パラメータに依存しない式を形成することができない。だから、歪度を用いるだけでは分布の同定を行うことはできない。しかし、実は4次のパラメータまでを用いると、パラメータに依存しない式を形成することが可能になる。

この性質を半正規分布の場合について確かめてみよう。技術非効率を表す半正規分布と、一般誤差項を表す正規分布のたたみ込みの分布の2次、3次、4次のモーメント式は、第1節において既に計算している。これらの式から二つのパラメータ  $\sigma_u, \sigma_v$  を消去することは可能であり、各モーメントの間に、

$$M_3 = 3M_2^2 + \frac{8(\pi - 3)}{2^{2/3}(4 - \pi)^{4/3}} |M_3|^{\frac{4}{3}}$$

という関係が成立していることを計算によって確かめることができる。ただし、 $M_2, M_3, M_4$  はそれぞれ2次、3次、4次のモーメントである。この式は、パラメータの値  $\sigma_u, \sigma_v$  に依存しないて成立していることに注意されたい。そのため、先験的にこれらのパラメータの値がわかっていなくとも、検定を行うことができるのである。

次に、技術非効率が生じた場合には、同様に

$$M_3 = 3M_2^2 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} |M_3|^{\frac{4}{3}}$$

となる。半正規分布の場合と異なるのは、単に3次のモーメントにかかる係数だけであるにすぎない。したがって、この係数の値を検定すれば両者の識別を行うことができる。3次のモーメントにかかる係数を  $K_h$  とすると、モーメント間の関係がどちらの場合にも、

$$M_4 = 3M_2^2 + K_h |M_3|^{4/3} \quad (15)$$

という形で表せることになる。

今まで言及した他の分布についても、この値を計算できる。自由度1の  $\chi^2$  乗分布の場合は、 $K_h = 3$  であり、 $\Gamma$  分布の場合には、 $K_h = 3/\sqrt[3]{2(m+1)}$  となるのがわかる。 $\Gamma$  分布の場合に、 $K_h$  の値が定数にならずパラメータが残るのは、 $\Gamma$  分布はパラメータとして、分散の大きさを示すものと、分布の形状を決めるものという、二つのパラメータを持つので、形状を示すパラメータが残ってしまうことを表している。このように分布の形状に対して、一つの  $K_h$  の値が対応する。この性質によって、分布の形状に対する仮説を検定することができる。この検定において、ランダムな対称的ノイズがあったとしても、 $\sigma_v$  の大きさに吸収されてしまい、しかも検定する式は  $\sigma_v$  の大きさに依存せずに、同じ式が成立するので、ロバストな検定をすることができる。

また、切断正規分布の場合には、 $K_h$  は

$$\frac{-A^3 - 7A^2 - 12A - 6 + (3A + 4)A^2/m^2}{(A^2 + 3A + 2 - A^2/m^2)^{4/3}}, \quad \text{where } A \equiv me^{\frac{m^2}{2}} \int_{-m}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{and } m \equiv \frac{\mu}{\sigma_u} \quad (16)$$

という形の式を得る。Γ分布の場合と同様に  $m = \mu/\sigma_u$  という形状を示すパラメータが残っている。 $K_h$  の水準をこの形状パラメータ  $m$  の関数として考えると、図 4.3 のとおり  $m$  の単調減少関数となる。<sup>10</sup> また、 $m$  が負の値をとり、しかも絶対値が十分に大きいとき、すなわち正規分布の尾の先端の部分で切断された切断正規分布であるとき、 $K_h$  の値は  $3/2^{1/3}$  に収束してゆく。<sup>11</sup>これは、正規分布の尾の先端で切断された切断分布は指数分布で近似できることを示している。<sup>12</sup>このように、切断正規分布の  $K_h$  の値は、この指数分布の  $K_h$  の値を上限とする値域をとる。<sup>13</sup>

図 4.3：切断正規分布における  $K_h$  の値

## 7.2 X 非効率の存在検定

### X 非効率の存在検定のための仮説

それでは、本節の目的である、X 非効率の存在を検定する方法として、モーメント間の関係式 (15) を用いることができるだろうか。そこで、問題となる指数冪乗型分布の場合について、モーメント間の関係を調べる。

指数冪乗型分布の場合には、モーメント間の関係はやはり  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  の型に書き表すことができ、定数  $K_h$  は、

$$K_h = \frac{g_5g_1^3 - 4g_4g_2g_1^2 + 12g_3g_2^2g_1 - 6g_2^4 - 3g_3^2g_1^2}{(g_4g_1^2 - 3g_3g_2g_1 + 2g_2^3)^{4/3}} \quad (17)$$

という値をとることがわかる。ただし、 $g_j = \Gamma(j/(1+p))$  とする。 $K_h$  は、 $p > -1$  において図 4.4 に示すように、 $[-\infty, +\infty]$  を値域とする  $p$  の単調減少関数である。したがって、計量分析により  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  を満たす  $K_h$  の値を推計することができれば、上式を満たす  $p$  の値、すなわち、事業所は非効率の程度の何乗に比例して平均的に更新投資をおこなっているだろうかという、市場構造の決定パラメータを一意に求めることができ、さらに仮説： $p > 0$  を検定することができる。

### 産業間クロス・セクション分析

<sup>10</sup>式 (16) の値を示す図 4.3 および次の式 (17) の値を示す図 4.4 は Mathematica を用いて描画したものである。式 (16) および式 (17) がそれぞれ  $m$  と  $p$  の単調減少関数であることは、筆者は未だ解析的に示すことに成功していない。

<sup>11</sup> $m$  の値が負の無限大に近づいて行くとき、 $A$  を漸近展開すると  $-1 + 1/m^2 - 3/m^4 + 15/m^6 - 105/m^8$  と近似できることがわかる。これを、 $K_h$  の式に代入して整理すると、

$$\frac{6m^{24} + 801m^{22} + \dots}{(2m^{18} - 30m^{16} + \dots)^{4/3}}$$

という形の式を得る。したがって、 $m$  が十分に大きいとき、この値は  $3/2^{1/3}$  に収束する。

<sup>12</sup>切断正規分布の密度関数

$$\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) / \sigma \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

において、 $\mu \rightarrow \infty$  のとき、 $\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$  は  $\sigma e^{-\mu^2/(2\sigma^2)}/\mu$  と漸近展開できることを用いると、分布は、

$$\mu \exp\left(-\frac{x^2 - 2x\mu}{2\sigma^2}\right) / \sigma^2 = \exp\left(\frac{x}{\sigma^2}\left(\mu - \frac{x}{2}\right)\right) \mu / \sigma^2$$

と変形できる。 $\mu \gg x$  のとき、この分布は  $\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x\right) \mu / \sigma^2$  という指数分布に近似できる。

<sup>13</sup> 6 において、半正規分布を検定を行なうために一般化した際、 $\psi(u) = C \exp(-u^{1+p}/K)$  を採用した。 $\psi(u) = C \exp(-(u-\mu)^{1+p}/K)$  がさらに一般的な拡張となるが帰無仮説  $p > 0$  を検定するためには、対立仮説の可能性をより小さくする  $\mu = 0$  の場合で十分であるとした。実際、数値分析してみると、 $p > 0$  の時は、 $K_h$  は  $\mu$  の減少関数であり、 $p < 0$  の時は逆に増大関数になる。どちらの場合も  $\mu$  が十分に小さくなると ( $\mu \rightarrow -\infty$ )、 $K_h$  が約 2.38 という指数関数のケースに収束していく。この意味で、 $\mu < 0$  の状態を考えるのは、指数関数と半正規分布との間を補間することになる。もし、観測される  $K_h$  の値が指数関数のケース約 2.38 より小さい場合には、 $\mu$  が大きいために生じたのか、それとも  $\mu = 0$ 、 $p > 0$  であることにより生じているのかを識別することができない。しかし、観測される  $K_h$  の値が約 2.38 より大きい場合には、 $\mu = 0$ 、 $p > 0$  である可能性は無い。 $\mu$  の値に関わらず、 $p \leq 0$  の時にだけ  $K_h$  は指数関数のケースより大きい値を取るからである。したがって、帰無仮説  $p > 0$  を検定するためには、 $\mu = 0$  を仮定した上で検定を行なっても、検定を実質的に限定してしまうことは無い。

これらの検証をおこなう場合には、従来の研究のように個別産業について独立の検証をそれぞれおこなうことはせず、多くの産業について同時に横断的に検証をおこなう。

Lee においては、特定の産業の技術非効率の分布について検定が行なわれている。Lee のように個別のケースについて検定すると、ケースによってある分布型が棄却されたり支持されたりする。実際に、論文中で試みられた例では、1例で半正規分布が棄却され、もう1例では棄却されていない。その場合は、それぞれの産業で、技術非効率の異なった発生メカニズムが支配していると考えなければならないのだろうか。さらに、それぞれ異なるメカニズムの下に異なる分布の非効率が存在するとすれば、異なる産業の技術非効率の程度を、なんらかの一定の指標を作成して比較することは意味があるのだろうか、という問題がある。これまでの多くの研究では、まず、一つの非効率の分布が仮定され、その分布のパラメータの大きさによって、非効率の水準が表示されている。この従来の方法では、ある特定の分布が棄却される場合には、その分布の背景となるメカニズムの下では、ほとんど非効率が観測されない状態として解釈される。しかし、今の場合のように、個別の産業について一つ一つ特定の分布の適合性を調べる方法をとると、ある特定の分布が棄却されたとしても、他の分布については棄却されないという場合もあるだろう。この代替的な分布についても、パラメータの大きさによって非効率の大きさを示すことができる。この場合、異なる分布のパラメータは比較可能な指標と考えるべきであろうか。

多くの産業について横断的に検証をおこなうことによって、これらの問題を避けることができる。なぜなら、個別産業について、X 非効率が存在する傾向が検証されたとしても、それだけではこの産業においてたまたま制御しようのない環境要因があっただけなのか、それともある程度普遍的な X 非効率などの構造的要因があるためなのかを区別できないからである。鳥居 [2000] 第四章において確認されているように、個別産業において特殊な環境要因があるにもかかわらず、その要因を生産関数に含めることに失敗した場合にも、X 非効率が存在するのと同様の分布型における特性を観測することは可能である。しかし、多くの産業において共通なパターンで特殊な環境要因が同時に働くとは考えにくい。生産性に大きな影響を与えるなんらかの要因が、産業横断的に一般的に存在することが確認されれば、それが X 非効率によるものかどうかにかかわらず、産業分析において重要な視点となるだろう。

特に、動学的市場構造決定メカニズムを想定する場合には、横断的検証の方が望ましい。第一に、定数  $K_h$  は、4 次のモーメントまでの関係として導かれるが、決して単純な関係でないため、解析的に  $K_h$  の推計値の分布を知ることが現在のところできない。そのため、個別産業において  $K_h$  がある値をとるといふ仮説を立て、実際に  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  という関係式にモーメントの値を代入することによって  $K_h$  の推計値を求めたとしても、仮説を検定することが難しい。このように、個別産業の  $K_h$  について仮説を立てた場合には、やはり検定の問題がたちはだかる。しかし個別産業の  $K_h$  の値に仮説を立てるのではなく、多くの産業にわたる一般的な傾向として、 $K_h$  の値にたいして仮説を立てる場合には、異なる方法が可能になる。産業にわたる傾向として、ある特定の値の  $K_h$  をもつ  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  という関係があるという仮説であれば、十分検定可能となる。実際に、多くの産業にわたって横断的にモーメントの推計値を求めることによって、この式に表される関係が存在するかどうかを検定すればよい。後節において実際に日本の 370 の細分類製造業においてこの関係を検証する。そこでは、非常に明瞭な関係として、モーメント間の関係が存在することがわかる。

第二に、産業間にわたって同一の傾向が存在することを確認してはじめて、非効率を温存する傾向としてのパラメータの比較ができる。指数冪乗分布のパラメータ  $p$  の値は技術非効率の分布の形状を示すものであって、それだけでは平均的な非効率の大きさまでは与えない。前節で説明した確率的設備更新過程モデルに即して考えると、 $p$  の値は設備更新確率を非効率の大きさの関数で示したときの関数型を表す。しかし、平均的な効率性は、この関数の形状パラメータだけでなく、どの程度の割合の事業所が設備更新を行なうかという程度を示すパラメータ  $\theta$  が与えられて初めて算出される。もし、各産業にわたって関数の形状を表すパラメータ  $p$  の値が同一であると確認できれば、設備更新の程度を示すパラメータ  $\theta$  を比較することは、そのまま非効率の程度を比較することに等しい。しかし、産業ごとに関数の形状が異なると考

える場合には、それぞれ異なる関数の下でパラメータ  $\theta$  を比較することの意味をとることが難しい。なぜなら、 $p$  の値が異なる場合には、パラメータ  $\theta$  の値の大小関係と平均的な非効率の程度の大小関係とが必ずしも対応しないからである。

### COLS の採用

次に、産業横断的に成立する式 (15) を推計する方法を考える。この式を推計するためにはフロンティア生産関数からの乖離の各モーメントの値が必要である。すなわち、フロンティア生産関数を推計しなければならない。フロンティア生産関数の推計方法には、最尤法を用いる方法と、COLS 法と大きく分けて二つある。

最尤法でフロンティア生産関数を求める方法においては、まず先験的に残差分布の分布型を決定する。その分布にしたがって最も尤度が高くなるように、生産関数の係数を含むパラメータおよび残差分布のパラメータが与えられる。たとえば、フロンティア生産関数が  $y = X\vec{\beta}$  の形で、また残差分布の分布密度関数が  $\epsilon_i$  を  $i$  番目のサンプルの残差として  $d(\epsilon_i; \alpha)$  で与えられると、 $\prod_{i=1}^N d(y_i - X_i\vec{\beta}; \alpha)$  が最大になるように  $\alpha$  と  $\vec{\beta}$  が決まる。ところが、ここで用いる方法では、残差分布のパラメータは、多くの産業にわたる一般的な傾向を知るまでは与えられない。個別産業の生産関数を推計する段階では、 $\alpha$  の値は未知であるので、このままでは最尤法を用いてフロンティア生産関数すなわち  $\vec{\beta}$  を定めることもできない。

そこで、ここでは最尤法ではなく、COLS に代表されるモーメント法を用いる。すなわち、まず OLS を用いて、定数項を除くフロンティア生産関数の係数  $\vec{\beta}$  を求める。次に、回帰残差を計算し、その 4 次までのモーメントを求める。このとき、定数項の大きさは、2 次、3 次、4 次のモーメントに影響を与えてはいないことに注意せよ。こうして求めた  $i$  番目の産業の OLS 回帰残差の 2 次、3 次、4 次のモーメントを  $M_{2i}, M_{3i}, M_{4i}$  とする。このモーメントの系列を用いて産業間クロス・セクションの回帰分析により、

$$M_{4i} = 3M_{2i}^2 + K_h |M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i$$

の係数  $K_h$  を求める。この係数の推定値をいくつかの理論的な課題を検定するのに用いる。

ヴィンテージ非効率モデルを用いる場合には、係数  $K_h$  が与えられると、技術非効率の分布の形状を定めるパラメータ  $p$  の値が確定する。この値を用いて、各個別産業のモーメントの値から、どの程度の割合の事業所が設備更新を行なうかという程度を示すパラメータ  $\theta/\alpha$  の大きさを推計する (COLS)。このパラメータの大きさから各産業の非効率の水準が推計される。また、不可視の生産要素を仮定するモデルを用いる場合には、やはり各個別産業のモーメントの値から、分散の大きさを示すパラメータの大きさを COLS によって推計できる。

## 7.3 推計量のバイアス (モンテ・カルロ実験)

### モンテ・カルロ実験による OLS 推計値の分布の推計 (指数冪乗型分布)

ところで、この方法でバイアスのない  $K_h$  の推計値を得ることができるであろうか。技術非効率率が指数冪乗型をとる場合、理論的には、係数  $K_h$  の値とパラメータ  $p$  の値は、式 (17) に示される関係を持っている。しかし、有限なサンプルから推計した個別産業の回帰残差のモーメントを用いて、有限数の産業間にわたる OLS で推計した係数  $K_h$  の推計量の性質は、残念ながらわからない。ここでは、この推計量の性質をモンテ・カルロ法によって確かめておく。

まず、6 のモデルから求めた分布密度関数

$$\rho(x; p) = \frac{(1+p)^{p/(1+p)} (\theta/\alpha)^{1/(1+p)}}{\Gamma(1/(p+1))} \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right)$$

にしたがう確率変数を発生させる。ただし、 $\alpha/\theta$  の値は一定値 0.25 とする。次に正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  にしたがうランダム項も発生させて両者の和をとる。この作業を  $N$  回繰り返して、 $N$  個のサンプルを得る。こ

の  $N$  個のサンプルが、一つの仮想産業を構成するものとする。この仮想産業を 200 作成する。それぞれの仮想産業 ( $i$  産業とする) について、2 次、3 次、4 次のモーメントを計算し  $m_{2i}, m_{3i}, m_{4i}$  とする。次に、これらの仮想産業にわたって、切片を 0 に固定した OLS 分析:

$$m_{4i} - 3m_{2i}^2 = K(m_{3i})^{4/3} + \epsilon_i$$

を行い、回帰係数  $K$  を求める。以上の作業を 200 回繰り返す ( $p = 0$  の場合だけは後に仮説を検定を行うために、より正確な値を必要とするので 1000 回繰り返す)、推計値  $K$  の平均と分散を求める。以上の作業を  $p = 1.5, 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$ , の場合について、それぞれ  $\sigma_v = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2$  のケースを試行し、さらに仮想産業が  $N = 50, 100, 200, 500, 3000$  の事業所から構成されると仮定して ( $N = 3000$  の場合は、 $p = 0$  のケースのみ) 実験した。結果は表 4.2a ~ d にまとめられている。

表 4.2 a ~ d: 回帰分析による  $K_h$  の推計値のモンテ・カルロ実験の結果

これらの表から、モーメント法による推定量ゆえ一貫性を持つものの、推定値が漸近的に真の値に収束するためには、少なくとも個々の仮想産業が数千以上の事業所サンプルから構成されている必要があることが分かる。平均的に 100 程度の事業所から構成される通常の産業のケースでは、バイアスを避けられない。筆者は現在のところ、バイアスのない  $K_h$  の不偏推計量を得る方法を発見してはいない。バイアスの方向は、サンプルサイズの単調な関数ではない。しかし、ランダム・ノイズの大きさを示すパラメータ  $\sigma_v$  の値が一定以下の場合には、推計値が安定していることがわかる。そのため、推計値が安定していることを利用して、何らかの補正を行ってより不偏な推計値を得ることを試みる。

モンテ・カルロ実験では  $\alpha/\theta$  の値を一定としているが、この値は非効率の分布の分散の大きさを定める。もし、半正規分布を仮定する場合には、確率密度関数 (6) におけるパラメータ  $\sigma_u^2$  の大きさに該当する。<sup>14</sup> 表から、ほぼ  $\sigma_v < 0.25$  であれば  $K_h$  の推計値が安定した値を取ることが観察される。ランダム・ノイズの大きさがこの大きさを超えると、多くのケースにおいて推計値は真の値から大きく離れ始め、0 に近づいて行く。このように、非対称な技術非効率項が対称的誤差項に比べて小さい場合には、 $K_h$  の推計値はほぼ 0 に近い値を示すと考えてよい。これは、対称的誤差項も高次のモーメントの散らばりを持つため、その散らばりがノイズとなって、 $\sigma_v$  が  $\sigma_u$  に比べて十分に大きい場合には、非対称誤差項のモーメント間の関係を観測不能としてしまうからである。したがって、モーメント間の関係を推計した結果  $K_h$  の推計値が 0 であるという帰無仮説が棄却できなければ、非対称誤差項の分散が、対称誤差項の分散に比較して十分小さいと推論することができる。

#### 指数冪乗型分布における $p$ の推計値のバイアスの修正

ある程度のバイアスが避けられないのであるから、ヴィンテージ・メカニズムを仮定してその構造パラメータ  $p$  の値や、さらに非効率の水準を推計しようという場合には、バイアスの補正を考えなければならない。図 4.5 では、 $\sigma_v = 0$  の場合にさらに細かく  $p$  の値が -0.5 から 1.5、それぞれ仮想産業の構成事業所数  $N = 20, 50, 100, 150, 200, 300$  の場合について  $K_h$  の真の値と推計値との関係を調べている。図中、プロットされているのが推計値であり、太線は  $K_h$  の理論値を示している。この図から、バイアスの大きさは仮想産業の構成事業所数に大きく影響を受けることがわかる。ただし、構成事業所数に応じて、真の値と推計値とが安定した関係を保っていることが確認される。構成事業所数によって多少の変動はあるものの、事業所数が 50 を超え、かつ  $K_h$  の推計値が 2 以下であればその推計値にはあまりバイアスがかかっていないとみることができる。また、この程度の事業所数の範囲内であれば、バイアスの大きさは必ずし

<sup>14</sup>ただし、半正規分布の場合の分散の大きさは異なることに注意せよ。あくまで、分布関数のパラメータに過ぎない。半正規分布を仮定する場合、習慣的に分布型を正規分布の記述にならって  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right)$  のように表すため、分布パラメータ  $\sigma_u^2$  と、分布の分散  $\frac{\pi-2}{\pi}\sigma_u^2$  とに食い違いが生じる。なお、一般の  $p$  の値に対する分散の大きさは、補論の式 (22) に示されている。

も構成事業所数が大きくなれば小さくなるわけではない。試行のうち構成事業所数が 50 の場合が、 $K_h$  の推計値 -0.2 以上の領域で、もっともバイアスが小さかった。

図 4.5:  $K_h$  の推計値と真の値の関係

図 4.5 に示された推計値と真の値との関係は、

$$\hat{K}_h(p) = a_N + b_N p + \frac{c_N}{1 + \exp(d_N p + e_N)} \quad (18)$$

という式でよく近似することができる。構成事業所数ごとに非線型回帰によって推計した係数値は表 4.3 にまとめられている。一般の  $N$  の場合に外挿するための係数推計式は、

$$\begin{aligned} a_N &= 1.10826 + 0.21161 \ln(N) \\ b_N &= -0.2287 - 0.2259 \ln(N) \\ c_N &= -4.1564 + 1.35934 \ln(N) \\ d_N &= -4.4724 + 2.34825 \ln(N) \\ e_N &= -2.4872 + 0.7537 \ln(N) \end{aligned}$$

となる。この係数推計式から与えられる  $K_h$  の値を、各  $N$  の値についてプロットしたのが、図 4.5 の細線である。適合は良好であるので、計量分析の結果得た  $K_h$  の推計値から、ヴィンテージ・メカニズムのパラメータ  $p$  の値を推計することができる。

表 4.3:  $K_h$  の近似式 (18) の係数推計値

## 8 技術効率水準を推計する方法

本節以後の目的は、第 7 節で展開した方法によって日本の製造業における X 非効率の存在を計量的に確認することである。ヴィンテージ・モデルを想定しても合理的な設備更新期間の選択の結果としては説明できないとき、本稿において定義した「制御されていない非効率」としての X 非効率の存在を支持する事実と考えることができる。その検定を行うためには、できるだけ多くの複数の産業にわたってフロンティア生産関数の推計作業を行ない、フロンティア生産関数から現実の事業所のパフォーマンスがどの程度隔たっているかを知り、その乖離の 2 次、3 次、4 次のモーメント間に、(15) で予測されたような関係があるかどうかをクロス・セクション分析する必要がある。この作業は、多産業にわたるフロンティア生産関数に基づく技術非効率の観測に他ならない。この作業の結果、上記の X 非効率の存在の検定が可能になるだけでなく、同時に、技術非効率の水準を産業間および国際的に比較するためのデータベースの作成ができる。産業間、国際間の技術非効率の比較分析は後章で紹介される。

### 8.1 技術非効率の推計モデル

#### 確率論的生産フロンティアモデルの採用

技術非効率のモデルとして、確率論的生産フロンティアモデルをパラメトリックに推計する方法を採用する。この方法を選択する理由の第 1 は、基礎とするモデルにおいて、特に観測できない生産要素を仮定するモデルにおいて、微分可能な滑らかな生産フロンティアを仮定するのと整合的であることである。ノン・パラメトリック推計ではいくつかの最も生産性の高いサンプルをベンチマークとして、そのサンプルとの相対的な生産性の乖離を効率の尺度とするため、複数のサンプルの効率性が 1 となり、フロンティア上に微分可能でない点がいくつかできる。また、ヴィンテージ・モデルを仮定する場合においても、ノン・パラメトリックモデルを採用するのに問題がある。ヴィンテージ・モデルでは連続的な時間を想定してい

るため、設備更新が完了した時点で陳腐化が始まり、非効率性が 0 である確率は 0 である。これらの理由のため、複数のサンプルの効率性が 1 となるノン・パラメトリック推計は採用しにくい。

第 2 に、2 次以上のモーメントを推計するためには、パラメトリック推計であるかぎり、確率論的なモデルでも決定論的なモデルでもどちらでもよい。しかし、第 4 章で推計量の性質をモンテ・カル口法で求めたときに、ランダム・ノイズ項の大きさによって推計量が大きな影響を受けることを確認している。そのため、ランダム・ノイズの存在を仮定している確率論的なモデルを採用したほうが望ましい。第 2 章で説明したように確率論的なモデルと決定論的なモデルとの差は、推計上の技術的な問題を別とすれば、フロンティアを「可能な最大の」というニュアンスにどれだけ忠実に定義するかということにある。決定論的なモデルではすべての生産環境が非常に都合が良く整った場合にのみ効率性が 1 となる。しかし、ヴィンテージモデルでは、どの事業所でも設備更新を行えば最新のフロンティア技術を体化した設備を構築できると想定しているので、決定論的なモデルとはあまり整合的ではないだろう。

この他にも、後に産業間国際間の比較を行うための技術効率性の指数を求めるにあたって、いくつかの技術的な利点がある。第 1 に、測定誤差や説明変数の欠落による誤差を排除した形の技術非効率を推定することができ、技術非効率水準の推定値の分散をなるべく小さくすることができる。比較可能な技術非効率の指数を作成することを目的とした場合、適切な異常値除去のメカニズムを伴った決定論的生産フロンティアの推定によって、より定義に忠実な生産関数の形状を得ることよりも、技術非効率の水準の推定値の信頼性を高めることを選択したほうが得策である。第 2 に、確率論的な生産フロンティアモデルにおいては、技術非効率による残差項  $u_i$  に仮定する分布のパラメータを、対称的誤差項  $v_i$  に仮定する分布のパラメータと比較できる形で得ることができる。例えば、 $v_i$  の分散  $\sigma_v$  の推定値を、 $u_i$  の分散  $\sigma_u$  の推定値と同時に得ることができるので、技術非効率の大きさをノイズの大きさに対する相対的な値として表すことができる。第 3 に、確率論的な生産フロンティアモデルにおいては、産業全体の平均的な技術非効率の水準しか求めることはできないという制約があるが、この制約は、産業間や国際間で比較をする際にはまったく問題とはならない。

## COLS の採用

非効率の分布の構造パラメータを、フロンティア生産関数の推計に先だてて得る事ができないため、ここでは最尤法ではなく COLS を用いる。第 4 章で説明したように、最尤法を用いるためには、非効率の分布型を確定させるための先験的な情報を持っていなければならない。X 非効率の存在は、非効率の分布型を特定することによって検定されるから、最尤法を用いることは適切ではない。

COLS は最尤法よりはるかに容易な方法で一致推定量 (Consistent Estimator) を得ることができるという特質もある。さらに、得られる推計量は MLE に比べ、十分に有効な推計量であることが、Olson, Schmidt and Waldman [1980] によって確かめられている。X 非効率の存在検定に必要なのは、フロンティア生産関数からの乖離の 2,3,4 次モーメントである。これらのモーメントの推定値は、生産関数のミス・スペフィケーションに対して、比較的頑健であることも Torii [1992a] において確かめられている。

## 8.2 トランス・ログ生産関数

### 生産関数

生産関数には、トランス・ログ型の生産関数を採用した。生産関数に仮定される様々な関数型の中でも一般性の高いトランス・ログ型の生産関数を用いることによって、アレンの偏代替性や強い分離可能性 (Strong Separability) について強い仮定を設けなくともよい。さらに、より重要なことには、規模に対して生産関数が同型 (homothetic) であることを仮定しなくともよい。<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Trans-log 型の生産関数の性質は Christensen, Jorgenson and Lau [1973] によって明らかにされている。詳しい内容は原論文または黒田 [1984] 第 12 章を参照されたい。

具体的には、以下に示す2通りの生産関数を用いている。この関数型は、国際比較をするために Caves [1982] によって提唱されたものに準じている。生産関数における被説明変数は付加価値 (VA) とする。また、説明変数すなわち投入要素としては、有形固定資産 (K) および現金給与総額で測った労働投入量 (L) とする。そして、ここでは規模の効果を明示的に示すため、両辺の変数を労働投入量あたりで正準化している。(19) と (20) との違いは、後者が説明変数の中に  $X1 \sim X4$  という、生産労働者と非生産労働者の間で生産に対して生み出すサビスの違いがあった場合や、エネルギー 使用的生産技術とエネルギー 節約型があった場合等様々な補正のための変数を持っているということだけである。

$$\log(VA/L) = a_0 + a_1 \log(K/L) + a_2 \{\log(K/L)\}^2 + a_3 \log(L) + a_4 (\log L)^2 + a_5 \log(K/L) \log(L) + v - u \quad (19)$$

$$\log(VA/L) = a_0 + a_1 \log(K/L) + a_2 \{\log(K/L)\}^2 + a_3 \log(L) + a_4 (\log L)^2 + a_5 \log(K/L) \log(L) + a_6 X1 + a_7 X2 + a_8 X3 + a_9 X4 + v - u \quad (20)$$

ただし、

- VA: 付加価値
- K: 資本
- L: 労働投入 (現金給与総額で測る)
- X1: エネルギー - 費用の原材料等使用額に占める比率
- X2: 在庫保有額の資本に占める比率
- X3: 多角化指標 (6 桁分類で最大の商品の出荷額が全出荷額に占める比率  
この値が低いほど多角化がすすんでいる。)
- X4: 依託生産費の原材料等使用額に占める比率

である。

#### 変数の詳細

用いた資料および各変数の定義は以下のとおりである。

##### 1. 資料

1995 年度工業センサス個票

##### 2. 対象とする事業所

30 人以上の従業者を持つ事業所 (甲表)

##### 3. 生産関数を推定する単位

4 桁分類製造業における事業所単位のクロスセクション分析

##### 4. 各変数の算出

$VA = \text{出荷額計} - (\text{原材料等使用額} + \text{原材料} \cdot \text{燃料在庫減} + \text{仕掛品在庫減})$

$K = \text{有形固定資産年初現在高} + (\text{有形固定資産取得額} - \text{有形固定資産除去額} - \text{減価償却額}) / 2 + (\text{年初在庫額} + \text{年末在庫額}) / 2$

$L = \text{現金給与総額}$

$X1 = (\text{燃料使用額} + \text{電力使用額}) / \text{原材料等使用額}$

$X2 = (\text{年初在庫額} + \text{年末在庫額}) / (2K)$

$X3 = \text{6 桁分類で最大の出荷額を持つ品目の出荷額} / \text{出荷総額}$

$X4 = \text{依託生産費} / \text{原材料等使用額}$

## 関数推定におけるヴァリエーション

生産関数推定において以下のような自由度を残しておく。

1.  $X1 \sim X4$  を説明変数に含めるか否か。  
補正の為の変数があることによって、生産関数の適合性が増大するか否かは先験的には分からない。この選択は、(19) と (20) のどちらを採用するかという選択となる。
2. 加重回帰分析を行なうか、それとも通常の重回帰分析を行なうか。  
係数の不偏推定量をえるための回帰分析を OLS でおこなうか、それとも OLS 残差で加重したものについて再度 OLS を行うかの選択。
3. 変数の算出の段階でとりわけて大きな事業所を除去するか。  
少数の事業所の資料が結果を左右することは、とくに回帰残差が重要な役割を果たす技術非効率の推定を行なう際には、注意深く避けなければならない。そのため、異常値となりそうなサンプルを事前に排除することが考えられる。この排除は、粗産出高、原材料等使用額、付加価値、資本という主たる変数の値が、その変数の (平均  $\pm 4.5 \times$  標準偏差) の範囲に入らないサンプルを除去することによって行う。しかし、確率論的な生産フロンティアモデルは異常値の影響を少なくするビルト・インされたメカニズムをもっていると考えるべきである。したがって、この選択は、異常値の予防的な排除を、さらに敢えて行なうか否かの選択である。なお、2. についても同様の指摘が可能である。この処置は、あくまで  $v$  の中に含まれるノイズとしての異常値の予防的な排除であって、異常値を検出し除去する処置ではない。ただし、以下では、便宜上、異常値の除去と表現する。

以下では、生産関数推計のヴァリエーションを表 5.1 にまとめられた記号で示す。先験的には、各ヴァリエーションのうちどの推計方法が日本の製造業における生産関数の推計方法として適切であるかの情報が無いため、以下ではできるかぎり各ヴァリエーションごとの推計結果を表示する。

表 5.1: フロンティア生産関数推計のヴァリエーション

不適切な事業所サンプルの除去と生産関数の推定を行なう条件 以下の事業所は対象から除外した。

1. 年初または年末の有形固定資産額が 0。
2. 現金給与総額が 0。
3. 常用労働者数が 0。
4. 出荷額が 0。
5. 常用の生産労働者数が 0。
6. 付加価値額が 0 以下。
7. 原材料等使用額が 0。
8. 生産労働者に対する現金給与総額が 0。

回帰式に於ける自由度を保つため、不適切な事業所サンプルを除去した後には有効なサンプルが 20 以上残った産業についてのみ、生産関数の推定を行なった。以下では、これらの産業を有効な産業と表現する。全 406 産業中、最終的に 370 細分類製造業について生産関数の推定が可能であった。有効な産業の事業所数の分布は表 5.2 に示されている。サンプル数の分布の主な統計量は

最小値：21、最大値：2293、平均：137.8、中央値：72、  
標準偏差：210.4、歪度：5.7

であった。

表 5.2: 有効な産業の事業所数分布

## 9 X 非効率の存在の検定

各ヴァリエーションごとの回帰残差のモーメントは表 5.3 にまとめられている。表によって、回帰残差のモーメントは、回帰分析のヴァリエーションにはあまり依存していないことがわかる。なお、3 次のモーメントにおける「0 以上」の行は、3 次のモーメントが正の値をとる産業の数を示している。これらの産業では、生産関数からの乖離が正の方向に歪んだ分布をとっている。非効率に対して仮定される分布型においてはすべて、3 次のモーメントが負の値をとる。したがって、モーメント法ではこれらの産業について  $\sigma_u$  や  $\sigma_v$  の推計値を得ることができない。これらのケースは Olson et al. によって「第 1 種の失敗」と呼ばれている。ほぼ 4 分の 1 前後の産業において、この第 1 種の困難に遭遇している。残りの 4 分の 3 前後の産業においては、負の 3 次モーメントを示している。この負の 3 次モーメントは、一般に技術非効率の推計において想定されている分布型と整合的である。

表 5.3: 回帰残差のモーメント推計値

### 9.1 モーメント間の関係

#### OLS 分析

モーメント間の関係式  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  における係数  $K_h$  の値を推計するため、次の回帰分析を行う。

$$M_{4i} - 3M_{2i}^2 = K_0|M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i \quad (R1)$$

$$\log(M_{4i} - 3M_{2i}^2) = K_1 + \log|M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i \quad \text{for } i \text{ such that } M_{4i} - 3M_{2i}^2 > 0 \quad (R2)$$

対数変換した回帰式 (R2) を用意したのは、回帰式 (R1) では散布図 5.1 に明瞭なとおり説明変数の分布に偏りがあり、回帰係数はいくつかの大きな 3 次モーメントを示す産業に大きく依存してしまう懸念があるからである。変数を対数変換した場合には、回帰式 (R2) に対応する散布図 5.2 に見られるとおり、この問題は軽減されている。しかし、一方で分散不均一性の問題が顕著となるのがわかる。そこで、回帰係数の分散値の推計においては、White [1980] によって提唱されている分散不均一性の問題に頑健な推計値 (heteroscedastic free estimator) を用いる。また、回帰分析 (R1) においては定数項は 0 に固定されており、回帰分析 (R2) においては、回帰係数は 1 に固定されている。どちらも、モーメント間の関係式が  $M_4 = 3M_2^2 + K_h|M_3|^{4/3}$  の形となることが先験的にわかっていることを用いている。

図 5.1: 回帰式  $M_{4i} - 3M_{2i}^2 = K_0|M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i$  の推計

図 5.2: 回帰式  $\log(M_{4i} - 3M_{2i}^2) = K_1 + \log|M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i$  の推計 (1)

表 5.4: モーメント間の関係推計式

回帰分析の結果は、表 5.4 にまとめられている。表から明らかとなり、対数変換しないままの場合には  $K_h$  の推計値は、ほぼ 3.5 程度、対数変換した場合には、4 を超える推計値をとることがわかる。この差は、説明変数の偏りによる問題に帰するようである。回帰分析 (R2) においては、対数変換を可能とするために、回帰分析 (R1) の対象となる産業のうち  $M_{4i} - 3M_{2i}^2$  の値が正となる産業に限っている。その

ため、たとえばケース IWD では、産業数が (R1) の 370 に対し、(R2) で 335 と減っている。しかし、この差は係数  $K_h$  の推計値に大きな影響を与えていない。たとえば、ケース IWD では、産業データセットを (R1) と (R2) で同じ 335 にかぎっても、(R1) の結果は、推計値 3.518 標準偏差 0.271 とほとんど変化しない。このように、データセットの差が推計値の差の原因では無い。しかし、2 つの回帰式による推計値の差は無視できる値では無いので、推計値の頑健性を疑わなければならない。

#### モーメント間の関係推計の信頼性を高めるために用意するモンテ・カルロ実験

二つの回帰式による推計値の差は、説明変数の分布に偏りがあるため、それぞれの回帰分析において、データセットのある特異な部分が回帰係数に強く影響を与えていることによっている可能性がある。そこで、データセットである回帰残差のモーメントの推計値の性質を確かめるために、次のようなモンテ・カルロ実験を行う。まず、 $p$  の推計値が  $-0.5$  の周辺に分布していることをふまえて、第 4 章補節に記されているアルゴリズムによって、 $p = -0.5$  となる指数冪乗型分布にしたがう乱数  $u$  を発生させる。ここで、 $\theta/\alpha$  の値は、1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 11, 15 の 13 通りとする。次に、 $N(0, \sigma_v^2)$  にしたがう乱数  $v$  を発生させる。 $\sigma_v^2$  の値は 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0 の 5 通りとする。これらのパラメータの値は日本の産業において推計された値に基づいて用意されている。この 2 つの確率変数  $u + v$  の 2, 3, 4 次のモーメントを求め、このモーメントの値からモーメント法によって  $\theta/\alpha$  の値を推計する。指数冪乗型分布の正規分布とのたたみ込みの分布の 3 次のモーメントは補節式 (22) に示されている。この式より、 $\theta/\alpha$  の推計値は  $M_3$  を 3 次のモーメントとして、

$$\hat{\theta} = (1 + p) \left( \frac{g_4 g_1^2 - 3 g_3 g_2 g_1 + 2 g_2^3}{-M_3 g_1^3} \right)^{\frac{1+p}{3}} \quad (21)$$

によって与えられる。ただし、 $g_j \equiv \Gamma(j/(1+p))$  である。モンテカルロ実験の結果は表 5.5 にまとめられている。表には、 $\sigma_v^2$  の推計値とモーメントから計算した歪度の値も掲載されている。すべて、200 回の試行の平均値である。また、事業所数については  $n = 100, 150, 200$  の 4 通りの場合が確かめられている。

表 5.5a,b: 指数冪乗分布にしたがう技術非効率サンプルから推計される回帰係数の性質

表から分かるように、サンプル・サイズが有限であることによって、モーメント法によるバイアスは避けられない。しかし、真の値と推計値とが一定の 1 対 1 の安定した対応を持っているかぎり、推計値のバイアスを補正することは容易である。実際に表を観察するかぎり、歪度が  $-0.5$  以下の値をとる場合、真の値とモーメント法による推計値とが 1 対 1 の関係を持っているようである。サンプル数によって異なるが、歪度が  $-0.5$  を超えると関係は安定でなくなり、さらに 1 対 1 対応ではなくなる。図 5.3 には、サンプル数 100,  $\sigma_v^2 = 0.25$  のケースが図示されている。<sup>16</sup> このように、非対称非効率項によって発生する分散を、モーメント法によって推計した推定値の信頼性が疑われる場合には、歪度が  $-0.5$  を超えるか否かを基準として採用することが可能である。

図 5.3: モーメント法による推計値と真の値との関係

ところで、 $p = -0.5$  の指数冪乗型分布の歪度は  $-4.302$  である。対称的誤差項とのたたみ込みが行われると、観測される歪度はこの値より低くなる。したがって、歪度が  $-0.5$  以上のケースとは、ノイズとして加えられた対称的誤差項の分散  $\sigma_v^2$  の大きさに比べて、非効率による非対称誤差項の分散が十分小さい場合である。これらのケースでは、 $\theta/\alpha$  の推計値こそ真の値から大きく離れているものの、 $\sigma_v^2$  の推計値はそれほど大きく真の値から離れていない。すなわち、非対称項が対称項に凌駕されてしまっているため、モーメントの値が示す情報はほとんど正規分布にしたがう乱数によるものとなり、モーメント法の推計値

<sup>16</sup>Torii[1992a] においては、技術非効率が半正規分布をなす場合に、同様なモンテ・カルロ実験をおこない、歪度が  $-0.3$  以下のケースについては不偏な推定量をモーメント法による分散の推定量とサンプル数の線型な関数として得られることを示している。

が大きくバイアスしてしまうのである。したがって、2次3次のモーメントの値には、ほとんど指数冪乗型分布にしたがう非対称項の情報は伝わっていないと考えられる。

### 信頼性のあるモーメント間の関係

パラメータを推計するモンテ・カルロ実験の結果から、サンプルの回帰残差の歪度の値が -0.5 以上の場合には、対称誤差項によるノイズが大きく、モーメントに非対称項の情報は正確には伝わっていないことが懸念されることがわかった。したがって、回帰分析 (R1) および (R2) においても、歪度の値が -0.5 以上となる産業を除外して推計する必要がある。このスクリーニングの結果、約 150 程度の産業が回帰分析から除外される。

表 5.6: モーメント間の関係を推計する修正された回帰分析の結果

表 5.6 が、修正された回帰分析の結果を示している。表の回帰分析 (R3) は (R1) を、(R4) は (R2) を、それぞれサンプル産業がスクリーンされた後の推計結果を示している。同表から、回帰分析 (R1) と (R2) との間に存在した乖離が縮小している。 $K_h$  の推計値は (R3) のヴァリエーション平均で 3.600 であるのに対し、(R4) で 3.472 である。推計値の大小が逆転しているが、これは、後にモンテ・カルロ実験の結果によって示すように、回帰分析 (R3) の  $K_h$  の推計値は大きい方にバイアスする傾向があるのに比べ、回帰分析 (R4) の推計値は小さい方向にバイアスする傾向があることに対応している。

以上のことから、回帰分析 (R3) および (R4) による  $K_h$  の推計値が、回帰分析 (R1) および (R2) の推計値に比べて、より信頼できると考えられる。

## 9.2 半正規分布および指数分布の仮説

3 を超える  $K_h$  の推計値の値は、これまでの技術非効率の分布の仮定に大きな問題があったことを示唆している。たとえば、半正規分布の場合には  $K_h$  の値は、理論上、

$$\frac{8(\pi - 3)}{2^{2/3}(4 - \pi)^{4/3}}$$

約 0.875 であるべきであるし、指数分布の場合にも、 $3/\sqrt[3]{2}$ 、約 2.381 であるべきである。これらの値に比べると表 5.6 に示される  $K_h$  の推計値は、はるかに大きい。歪度が -0.5 以下の産業を対象に散布図 5.2 を書きなおした散布図 5.4 には、非効率が半正規分布をなす場合に満たすべき関係が、細線で記入してある。この図からも、検定をするまでもなく半正規分布を仮定することが不適切であることが明らかである。また、回帰分析の係数の値が指数分布の場合の理論値  $3/\sqrt[3]{2}$  と等しいという帰無仮説はすべてのケースにおいて棄却される。Wald 検定 (自由度 1 の  $\chi^2$  乗) の値は 最低の場合で回帰式 (R3) について 166.6、(R4) について 18.67 である。

図 5.4: 回帰式  $\log(M_{4i} - 3M_{2i}^2) = K_1 + \log |M_{3i}|^{4/3} + \epsilon_i$  の推計 (2)

前章でモンテ・カルロ実験によって調べておいたように、事業所数 100 程度ではバイアスを避けられない。したがって、モンテ・カルロ実験で調べておいた推計値およびその分散の大きさを下に検定することが、より望ましい。まず、指数冪乗型分布で  $p = 1$ 、すなわち半正規分布のときの、OLS による  $K_h$  の推計値の、中央値 72 平均値 138 に近い事業所数 100 のケースを表 4.2 に参照する。最大の推計値となるケース ( $\sigma_v = 0.25$ ) では、推計値の平均は 0.938 であり、標準偏差 0.150 となる。したがって、非効率が半正規分布をなすという仮説は、やはり計算するまでもなく、明らかに棄却される。次に、 $p = 0$ 、すなわち指数分布でやはりサンプル数 100 のケースを同表から参照する。 $\sigma_v = 0.25$  のときには、推計値の平均は 2.568 であり、標準偏差 0.353 である。これを用いて、回帰式 (R3) による推計値を正規化する。正規化

された推計値は、最小 2.60 (EWD) 最大 3.30 (IOR) となる。最小でも、両側検定 1% で仮説は棄却される水準である。なお、 $\sigma_v$  の値によって平均、標準偏差とも変動があるが、 $\sigma_v = 0.25$  以外のケースを用いると、正規化された推計値は、 $\sigma_v = 0.25$  のケースに比べてさらに大きくなってしまふ。このように、技術非効率率が指数分布をなすという仮説も、両側検定 1% の有意水準で棄却される。

表 4.2 に示されているモンテ・カルロ実験の結果は、回帰式 (R3) に対応したものであるから、対数変換した値を用いた回帰式 (R4) の結果を評価するためには、さらにもう一つのモンテ・カルロ実験を行わなければならない。表 4.2 のモンテ・カルロ実験と同じ設定で、回帰式 (R4) に準じて  $K_h$  の値を推計した結果は、表 5.7 に示されている。ただし、 $p$  の値は指数分布の仮説を検討するため 0 に固定されており、試行は 1000 回としている。

表 5.7: 対数変換された変数を用いた回帰分析による  $K_h$  の推計値 (モンテ・カルロ実験の結果)

同表は回帰式 (R4) を用いた場合も、回帰式 (R3) を用いた場合と同様に、通常の製造業の構成事業所数である 100 程度のサンプル・サイズでは、バイアスを避けられないことを示している。回帰式 (R3) に対応するモンテ・カルロ実験から、 $\sigma_v > 0.25$  となる場合には、非対称な技術非効率項のモーメント間の関係は、対称なランダム・ノイズ項に陵駕されてしまっていることがわかっている。したがって、今度のモンテ・カルロ実験の結果に見られる、 $\sigma_v > 0.25$  の場合には  $\sigma_v$  が大きいほど推定値が増大するという性質も、おなじランダム・ノイズ項の影響によると考えられる。

ところで、回帰式 (R3) に対応するモンテ・カルロ実験の結果において、 $\sigma_v$  の大きさが  $\sigma_u$  の大きさに比べて大きくなると、回帰式 (R3) による  $K_h$  の推定値は 0 に近い値となっていくことが、前章において確認されている。また、回帰式 (R3) による推定の結果から、日本の製造業を対象とするかぎり、 $K_h$  の推定値は 0 と有意に異なっている。したがって、 $\sigma_u$  は  $\sigma_v$  の大きさに比べて十分大きいと推定される。それゆえ、推定値がランダム・ノイズの影響を強く受けてバイアスしているという可能性は考えなくともよい。

このランダム・ノイズの影響の少ない  $\sigma_v \leq 0.25$  の領域では、 $\sigma_v$  が小さいほど推定値のバイアスは小さい。構成事業所数が 100 程度では、 $\sigma_v = 0.05$  の時、推定値 0.362 標準偏差 0.041 である。なお、表には掲載していないが構成事業所数 100、 $\sigma_v = 0$  の時には、推定値 0.369 標準偏差 0.042 を得ている。この結果を表 5.6 の結果と比べると、やはり検定をするまでもなく、推定値がすべて 1 を超える回帰式 (R4) による推定の結果は、明らかに技術非効率率が指数分布をなすという仮説が棄却されることを示している。ただし、このような少数サンプルでは、推定値の分布が正規分布の形状とは異なっている可能性があるため、モンテ・カルロ実験の結果から 95% 分位点を推計しておき、比較する必要がある。モンテ・カルロ実験の結果から推計した 95% 分位点は、同表にまとめられている。この表からも、やはりすべてのケースにおいて技術非効率率が指数分布をなすという仮説が棄却されることは明白である。

したがって、指数分布をなすという仮説も、日本の製造業に見るかぎり支持されない。この事実によって、近年実証研究上よく仮定されている切断正規分布も、観測される非効率率を描写する仮定としては、同様に適切では無いことがわかる。係数  $K_h$  の理論値は式 (16) に示されているが、この式の値は前章で示したとおり、形状パラメータに依存して、指数分布の場合の値  $3/2^{1/3} \approx 2.381$  を上限とする値域をとる。上記の分析により、推定される  $K_h$  の値は、指数分布の場合の値より有意に大きい。したがって、切断正規分布は、すべてのパラメータの値にわたって、観測される  $K_h$  の値を裏付けることはできない。X 非効率率の同定の検定を行うために、半正規分布を一般化するとき切断正規分布を一般形としなかったのは、この事実を理由とする。すなわち、パラメータの値にかかわらず、現実の技術非効率率を記述する分布としては不適切であるので、切断正規分布は十分な一般化とは判断されなかったのである。

### 9.3 X 非効率率の存在

#### ヴィンテージ・モデルによる X 非効率率の同定

ヴィンテージ・モデルを仮定する場合には、各事業所が設備更新期間の選択を合理的に調整した結果として、現実の技術非効率の分布を説明できないとき、X 非効率の存在が確認される。観測される技術効率の分布を、合理的な調整の結果として解釈できるための必要条件の一つは、指数冪乗型分布によって技術非効率の分布を表したとき  $p > 0$  であることであった。境界である  $p = 0$  に対応する  $K_h$  の値は指数分布の場合の値に等しく約 2.381 である。上述のとおり、帰無仮説  $p = 0$  は回帰分析 (R3) (R4) において棄却されている。ところで、帰無仮説  $p = 0$  の検定は、技術非効率が指数分布をなすかどうかの検定として行なったため、両側検定を用いた。一方、X 非効率の存在を検証する仮説  $p > 0$  の検定は、実質的に帰無仮説  $p \geq 0$ 、対立仮説  $p < 0$  とする片側検定によって行なわれる。しかし、帰無仮説  $p = 0$  が両側検定で棄却されるかぎり、必ず仮説  $p \geq 0$  は同じ有意度の片側検定で棄却されるので、あらためて検定を行うまでもなく、仮説  $p > 0$  は棄却される。したがって、日本の製造業で発生している技術非効率には X 非効率が含まれているという仮説が支持される。

推計された  $K_h$  の値を用いて、理論式 (17) を満たす  $p$  の値を求めると、表 5.6 に示される  $p$  の推計値 I のようになる。さらに、モンテカルロ法によって得られた式 (18) によってバイアスを修正した推計値が  $p$  の推計値 II の欄に示されている。どの値も負の値を示している。たとえば、回帰分析 (R4) の結果のうち、サンプル数が全産業の中央値と等しいと仮定してバイアスを修正した推計 IIB では、回帰のヴァリエーションによって最小 -0.393 最大 -0.139 の  $p$  の推計値が得られている。最大の  $p$  の推計値を与えるケース (IWD) についての  $p$  の値の 95 % 信頼域は、(-0.234, -0.050) である。

パラメータ  $p$  の値が負の値となるということは、直感的には、任意に選ばれた事業所がより非効率であればあるほど、設備更新が行われる確率が低いということを示している。この事実だけでも、合理的な選択の結果とは考えにくい。また、たとえば、回帰式 (R3) 推計値 IIB のケース (IWD) の推計値  $p = -0.287$  に対応する設備更新期間の分布形状は、図 5.5 に示されている。設備更新期間が 0 に非常に近いところにモードを持ち、しかも尾が非常に長いという特徴がある。これは、ある一部の事業所は経済的であるか否かにかかわらず常に設備更新を続け、常にフロンティアの生産性を達成しようとしている一方で、多くの事業所では設備更新による生産性向上はまれにしか実行されないという傾向を示している。各事業所が更新期間を最適な値の方向に調整された後も、更新期間がこのような形に分布するということは考えにくい。そこで、ここで行われた検定によると X 非効率の存在が考えられる、と結論しているのである。

図 5.5:  $p = -0.287$  に対応する設備更新期間の分布密度関数

## 10 まとめ

以上に報告したように、第 7 節で展開した方法を日本の製造業に適用することによって、X 非効率の存在を計量的に否定できないことを示すことができる。ここで検討したのは、各事業所のヴィンテージの差によって技術非効率が発生していると考えられるモデルである。このモデルに基づく限り、合理的な意思決定によって技術非効率の水準が制御されているとしたら説明のつかない現象を確認することができた。

同時に、非対称な形状を持ち扱いやすいという理由によって現在まで頻繁に使用されてきた、半正規分布、指数分布、切断正規分布の仮定はすべて、日本の製造業に適用するかぎり適切な仮定ではないということが明らかになった。どの分布を仮定するかという選択は、推計される技術非効率の水準に大きな影響を与えるので、特に注意しなければならない。

ただ、検証する対象となる値は回帰残差の 4 次までのモーメントを用いているので、標本分布の性質を直接解析できるわけではなかった。そこで、検定作業は、実際の計量分析に近い形でのモンテ・カルロ実験を繰り返し行なった結果に大きく頼っている。しかも、通常の乱数発生アルゴリズムでは処理できない形の分布密度を持つ乱数を必要としたため乱数発生に時間を費やし、モンテ・カルロ実験の試行回数が必ずしも十分ではなかったかもしれない。方法を工夫することによってこの点の改善は十分に可能である。

## A 補論：確率的設備更新過程のモデル

事業所の設備更新が、その事業所の効率性に依存して、確率的に発生すると考える。すなわち、ある時点で非効率性  $x$  の事業所が、それから  $\Delta t$  時間以内に設備を更新する確率は  $\theta x^p \Delta t$  であるとする。 $\theta$  と  $p$  は定数である。 $p = 1$  の場合には、事業所の非効率性に比例して設備更新が行われ、 $p = 0$  の場合には、非効率性にかかわらず一定の割合で設備更新が行われる。正確には、ある設備更新時期の分布 (12) を持つ事業所の母集団の中から任意の事業所を選んでいるので、その事業所の設備更新時期が確率的に到来する。

$\rho(x, t)$  をある事業所が、時刻  $t$  において非効率性  $x$  である確率密度を示す確率密度関数であるとする。前述の設備更新行動を仮定すると、確率は  $1 - \theta x^p \Delta t$  で  $\Delta t$  時間以内には設備を更新しない。したがって、非効率性は技術の陳腐化によって  $\alpha \Delta t$  だけ低下する。この過程を確率密度関数を用いて表すと、

$$\rho(x + \alpha \Delta t, t + \Delta t) = \rho(x, t)(1 - \theta x^p \Delta t)$$

となる。この式を展開し、微小項  $\Delta t$  の 2 次以上の項を無視すると、

$$\rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t)(\alpha \Delta t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) \Delta t = \rho(x, t) - \rho(x, t) \theta x^p \Delta t$$

を得る。両辺から  $\rho(x, t)$  を控除し、整理すると

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\rho(x, t) \theta x^p$$

となる。 $\rho(x)$  を  $\rho(x, t)$  の  $t \rightarrow \infty$  における漸近分布 (asymptotic distribution) とする。この分布は  $0 < x < \infty$  において定義される関数である。 $\partial \rho(x) / \partial t = 0$  であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho(x) = -\frac{\theta x^p}{\alpha} \rho(x)$$

を得る。この微分方程式は簡単に解けて、

$$\rho(x) = C_1 \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right)$$

となる。 $C_1$  は定数である。

ここまででは、 $\rho$  の定義域として  $0 < x$  を考え、 $x = 0$  の場合を除外していた。 $0 \leq x < \alpha \Delta t$  の非効率性を示していた事業所は、設備更新を行わない限り、 $\Delta t$  後に  $\alpha \Delta t$  以上の非効率の領域に移動する。この領域に移動してくる事業所は、 $\Delta t$  時間内に設備更新をおこなって最新のフロンティア技術を体化した事業所である。他のすべての領域において設備更新をおこなう事業所の数は、

$$\int_0^\infty \rho(x) \theta x^p \Delta t dx = \int_0^\infty C_1 \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right) \theta x^p \Delta t dx = C_1 \alpha \Delta t$$

である。これだけの事業所が  $[0, \alpha \Delta t)$  に存在するから、確率密度は  $C_1 \alpha \Delta t / (\alpha \Delta t) = C_1$  である。この値は、 $0 < x$  で定義された確率密度関数の  $\rho(0)$  の値に一致する。したがって、確率密度関数を  $0 \leq x$  の範囲に拡張して同様に定義することができる。 $\rho(x)$  は確率密度関数であるから、

$$\int_0^\infty \rho(x) dx = \int_0^\infty C_1 \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right) dx = C_1 \frac{\Gamma(1/(p+1))}{(1+p)^{p/(1+p)} (\theta/\alpha)^{1/(1+p)}} = 1$$

でなければならない。このことから定数の値を得ることができ、確率密度関数は、

$$\rho(x; p) = \frac{(1+p)^{p/(1+p)} (\theta/\alpha)^{1/(1+p)}}{\Gamma(1/(p+1))} \exp\left(-\frac{\theta}{(p+1)\alpha} x^{p+1}\right)$$

となる。この分布と正規分布  $N(0, \sigma_v^2)$  とのたたみ込み、 $v - u$  の 2 次、3 次、4 次のモーメントはそれぞれ

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha(p+1)}{\theta} \right)^{\frac{2}{p+1}} \frac{g_3 g_1 - g_2^2}{g_1^2} + \sigma_v^2 \\ & \left( \frac{\alpha(p+1)}{\theta} \right)^{\frac{3}{p+1}} \frac{g_4 g_1^2 - 3g_3 g_2 g_1 + 2g_2^3}{g_1^3} \\ & \left( \frac{\alpha(p+1)}{\theta} \right)^{\frac{4}{p+1}} \frac{g_5 g_1^3 - 4g_4 g_2 g_1^2 + 6g_3 g_2^2 g_1 - 3g_2^4}{g_1^4} + \left( \frac{\alpha(p+1)}{\theta} \right)^{\frac{2}{p+1}} \frac{g_3 g_1 - g_2^2}{g_1^2} \sigma_v^2 + \sigma_v^4 \end{aligned} \quad (22)$$

である。ただし、 $g_j \equiv \Gamma(j/(1+p))$  とする。

$p = 1$  の時には、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  であり、確率密度関数は

$$\rho(x; 1) = \sqrt{\frac{2\theta}{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\theta}{2\alpha}x^2\right)$$

となる。この関数は、 $x \geq 0$  で定義された半正規分布 ( $\sigma_u^2 = \alpha/\theta$ ) である。また、 $p = 0$  の時には

$$\rho(x; 0) = \frac{\theta}{\alpha} \exp\left(-\frac{\theta}{\alpha}x\right)$$

となり、同様に指数分布に一致することが分かる。すなわち、半正規分布と指数分布をその特殊ケースとして含んだ分布となっている。

## References

- Caves, R. E. [1982], "Estimation of stochastic production frontiers and measures of technical inefficiency," Working memorandum, Harvard University.
- Caves R.E. and D.R. Barton [1990], *Efficiency in U.S. Manufacturing Industries*, Cambridge: MIT Press.
- Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau [1973], "Transcendental Logarithmic Production Frontiers," *Review of Economics and Statistics*, 55, no.1, February, pp.28-45.
- Cornwell, C., P. Schmidt, and R.C. Sickles [1990], "Production Frontiers with Cross-sectional and Time-series Variation in Efficiency Levels," *Journal of Econometrics*, 46(1/2), 185-200.
- Førsund, F.R. and L. Hjalmarsson [1987], *Analyses of Industrial Structure: A Putty-Clay Approach*, Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Franz, R., 1988, *X-inefficiency: Theory, Evidence, and Applications*, Norwell: Kluwer Academic Press.
- Greene, William H. [1990], "A Gamma-distributed stochastic frontier model," *Journal of Econometrics*, Vol. 46, No. 1/2, pp.141-64.
- Lee, L.F. [1983] "On maximum likelihood estimation of stochastic frontier production models," *Journal of Econometrics*, 23, pp.269-274.
- Leibenstein, H. [1966], "Allocative Efficiency vs. 'X-Efficiency'," *American Economic Review*, 56, 392-415.
- Leibenstein, H., 1976, *Beyond Economic Man A new foundation for microeconomics*, Cambridge: Harvard University Press.
- Olson, J.A., P. Schmidt and D.M. Waldman [1980], "A Monte Carlo study of Estimators of stochastic frontier production functions," *Journal of Econometrics*, 13, no.1, pp.67-82.
- Schmidt, P. and T. Lin [1984], "Simple tests of alternative specifications in stochastic frontier models," *Journal of Econometrics*, 24, pp.349-361.
- Stevenson, Rodney E [1980], "Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation," *Journal of Econometrics*, 13, no.1, pp.57-66.
- Teigen, L.D. and Milton Thomas [1995], *Weather and Yield 1950-93: Relationships, Distributions, and Data*, US Department of Agriculture, ERS Staff Paper AGE-9527.
- Torii, Akio [1992a], "Technical Efficiency in Japanese Industries," in R.E. Caves and Associates [1992] pp.31-119.
- White, H. and G.B. MacDonald [1980], "Some large-sample tests for non-normality in the linear regression model," *Journal of the American Statistical Association*, 75, pp.16-27.
- 黒田昌裕 [1984], 『実証経済学入門』, 日本評論社.
- 鳥居昭夫 [2000], 『日本産業の経営効率』, NTT出版

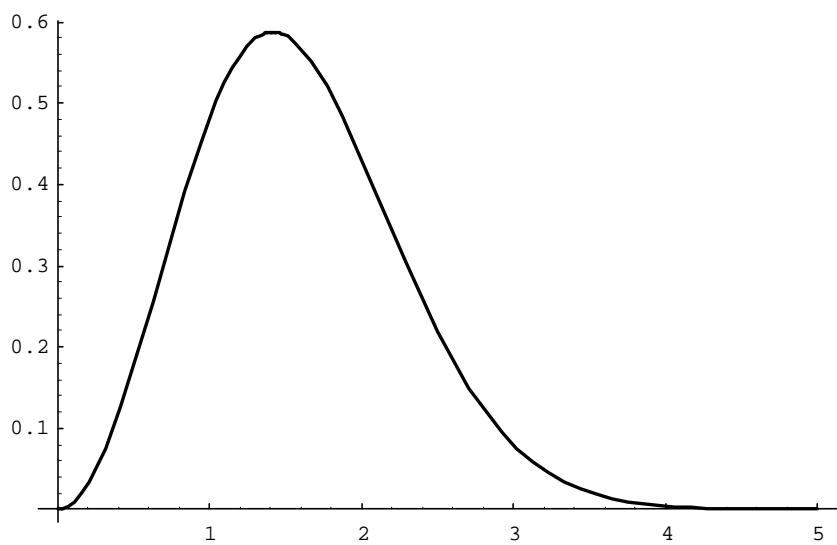


図4.1a: 技術非効率性が半正規分布をなす場合の、設備更新期間の分布の例

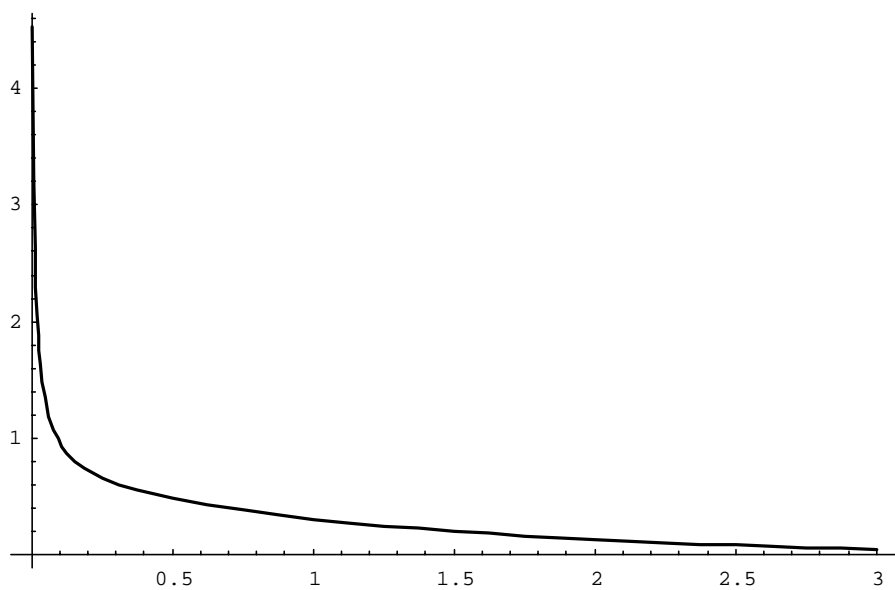


図4.1b: 技術非効率性が  $m = -1/2$  のガンマ分布をなす場合の設備更新期間の分布の例

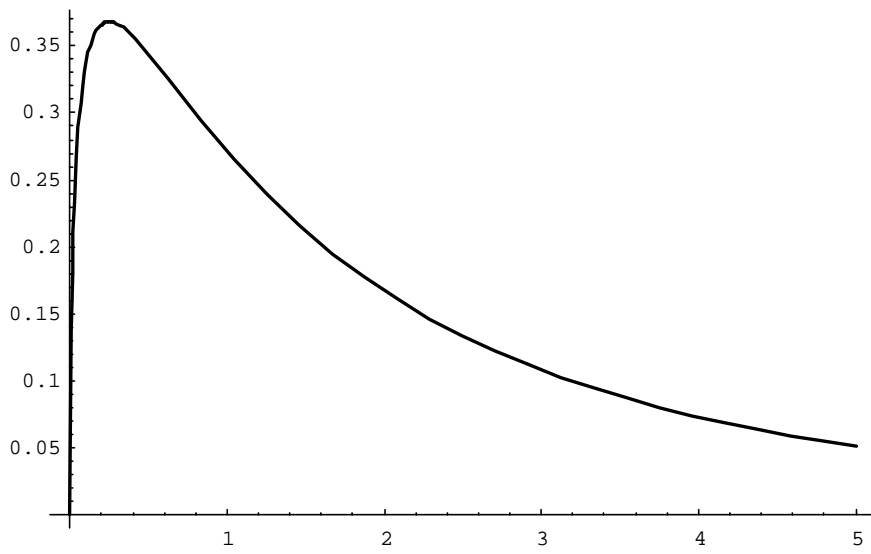


図4.2: 技術非効率率が  $p=-0.5$  の指数冪乗分布をなす場合の設備更新期間の分布の例

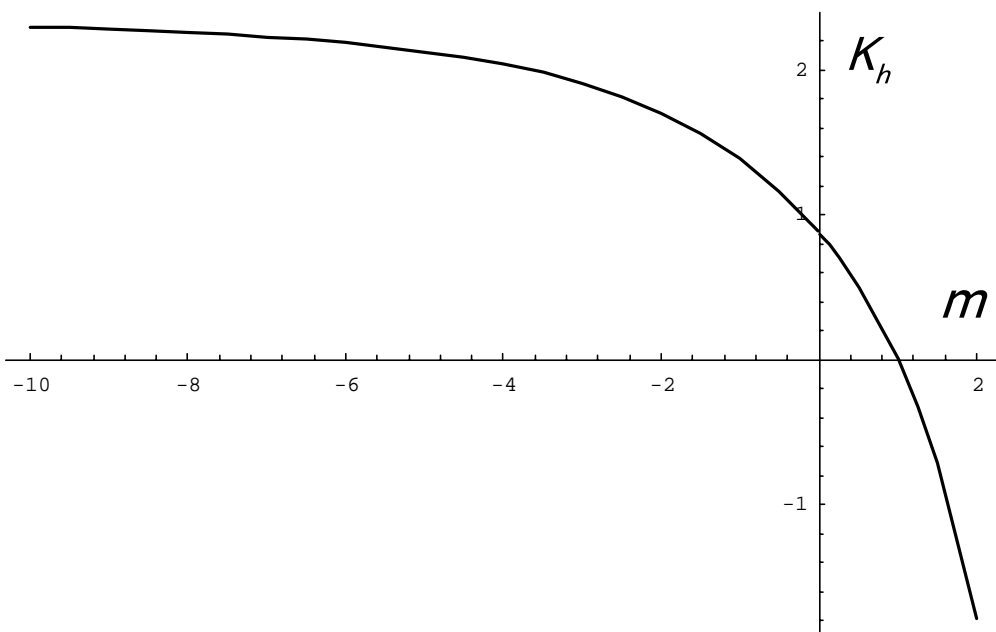


図4.3: 切断正規分布における  $K_h$  の値

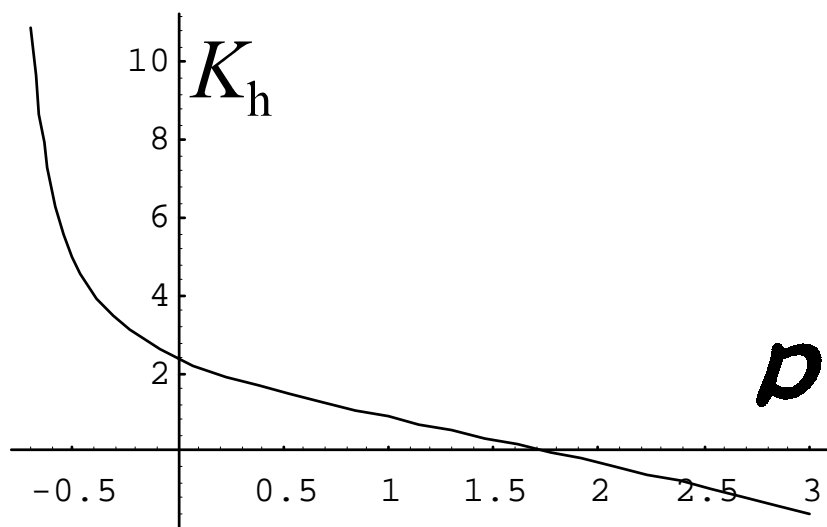
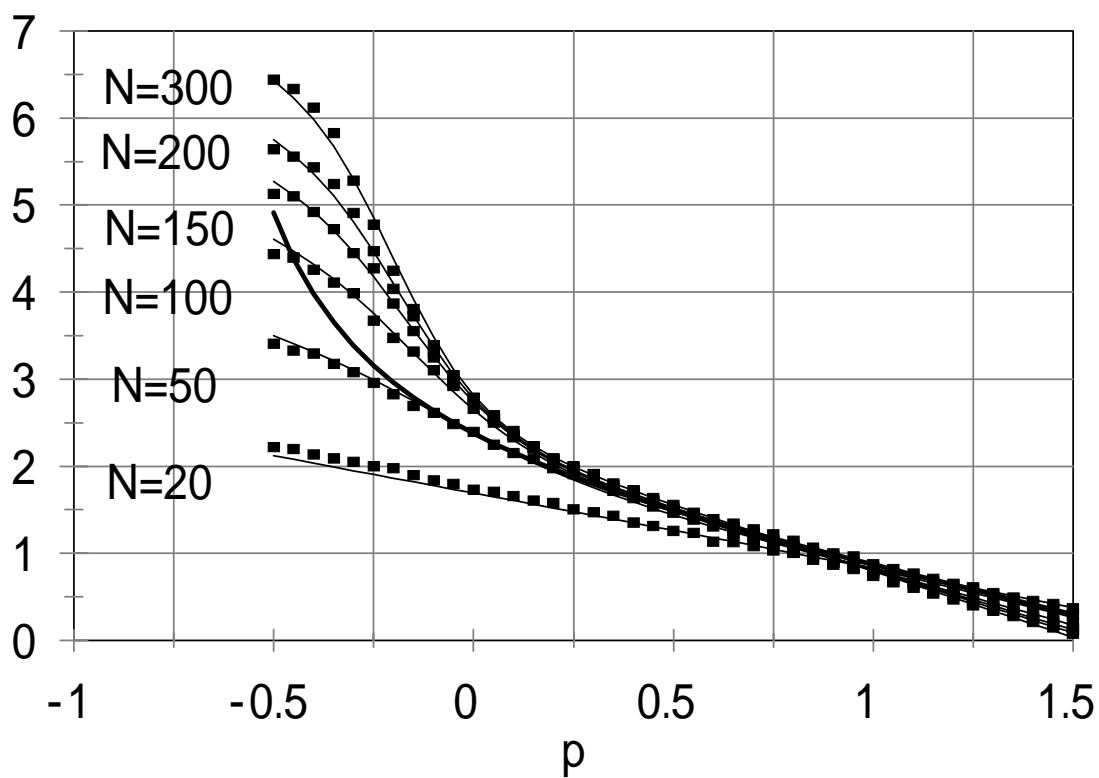


図4.4: 指数巾乗分布における $K_h$ の値

図4.5:  $K_h$ の推計値と真の値



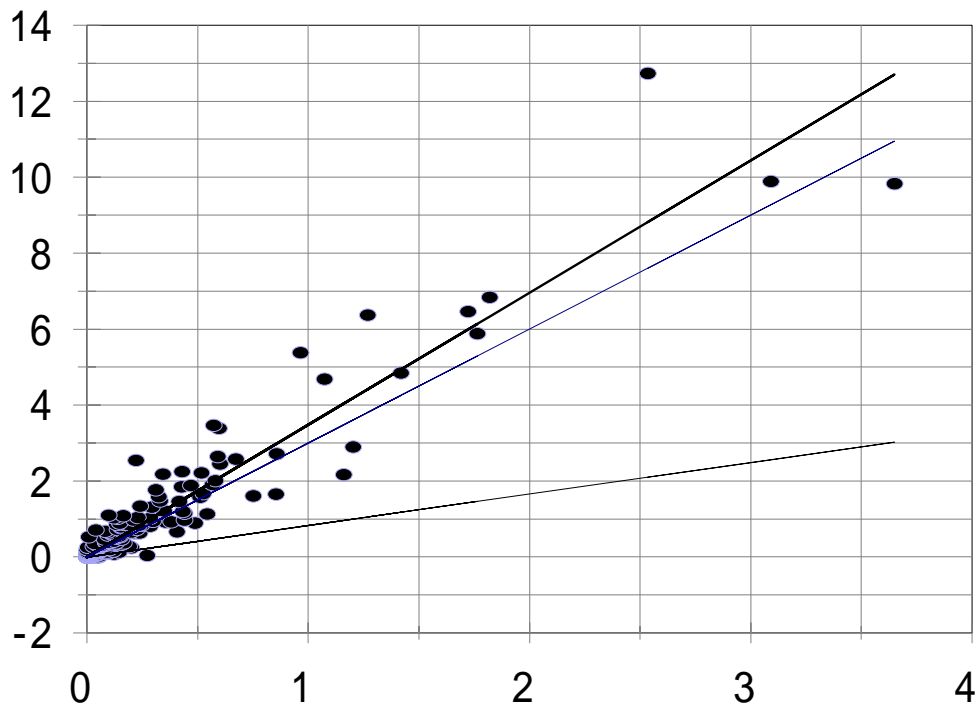


図5.1: 回帰式  $M_{4i} - 3M_{2i}^2 = K_0 |M_{3i}|^{4/3} + \varepsilon_i$  の推計

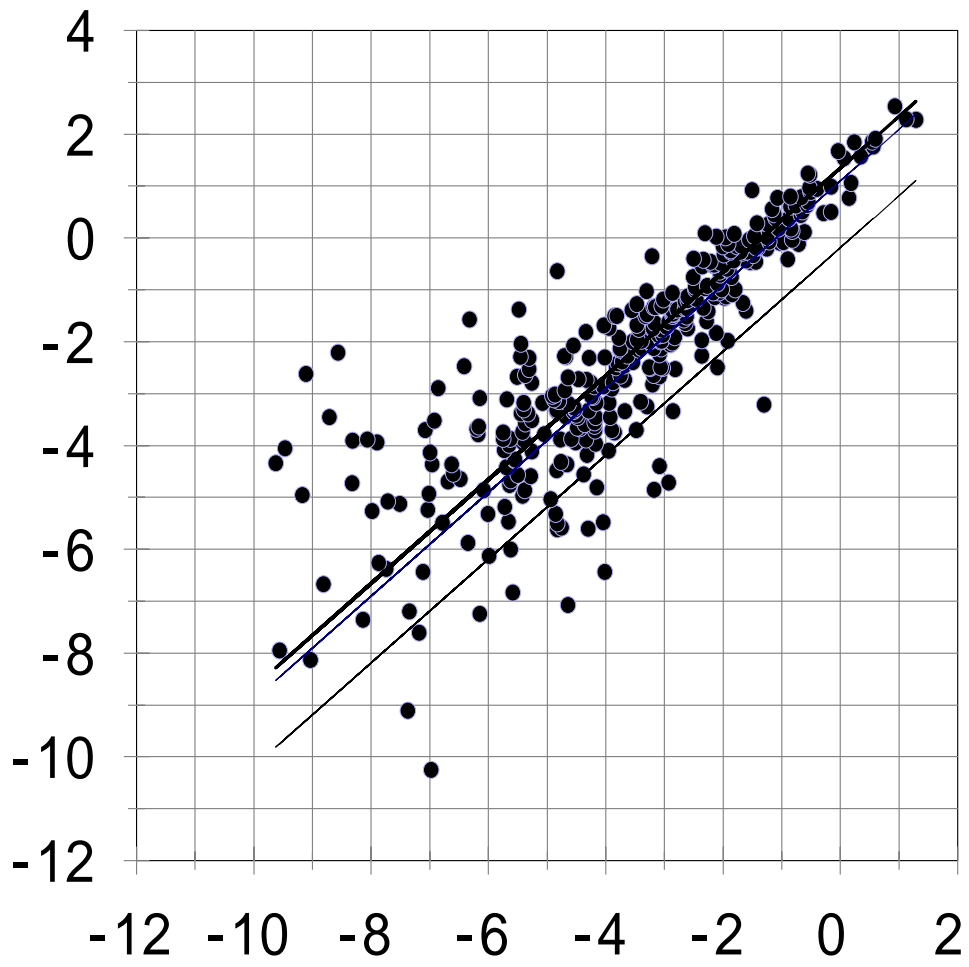


図5.2: 回帰式  $\log(M_{4i} - 3M_{2i}^2) = K_1 + \log |M_{3i}|^{4/3} + \varepsilon_i$  の推計 (1)

図5.3:モーメント法による推計値と  
真の値の関係

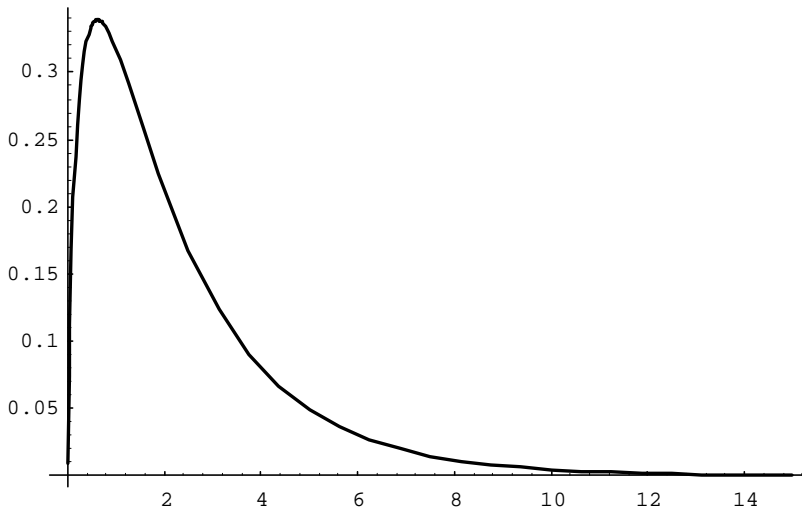
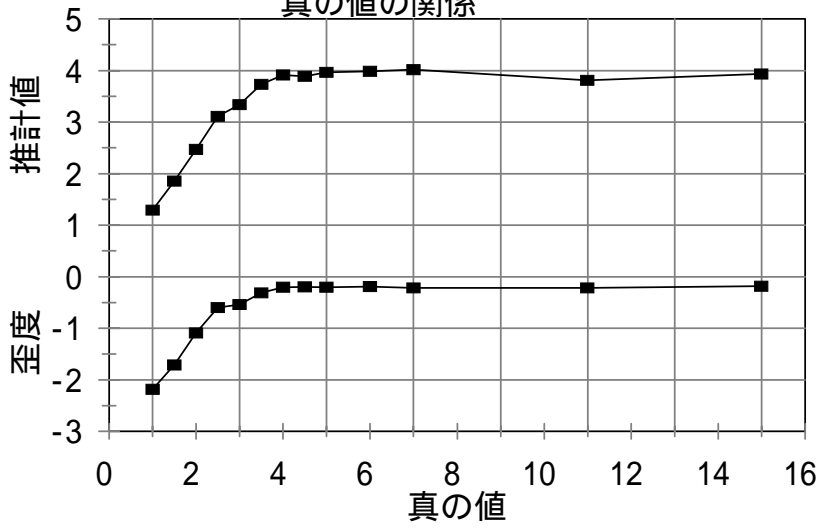


図5.5:  $p = -0.287$  に対応する設備更新期間の分布密度関数

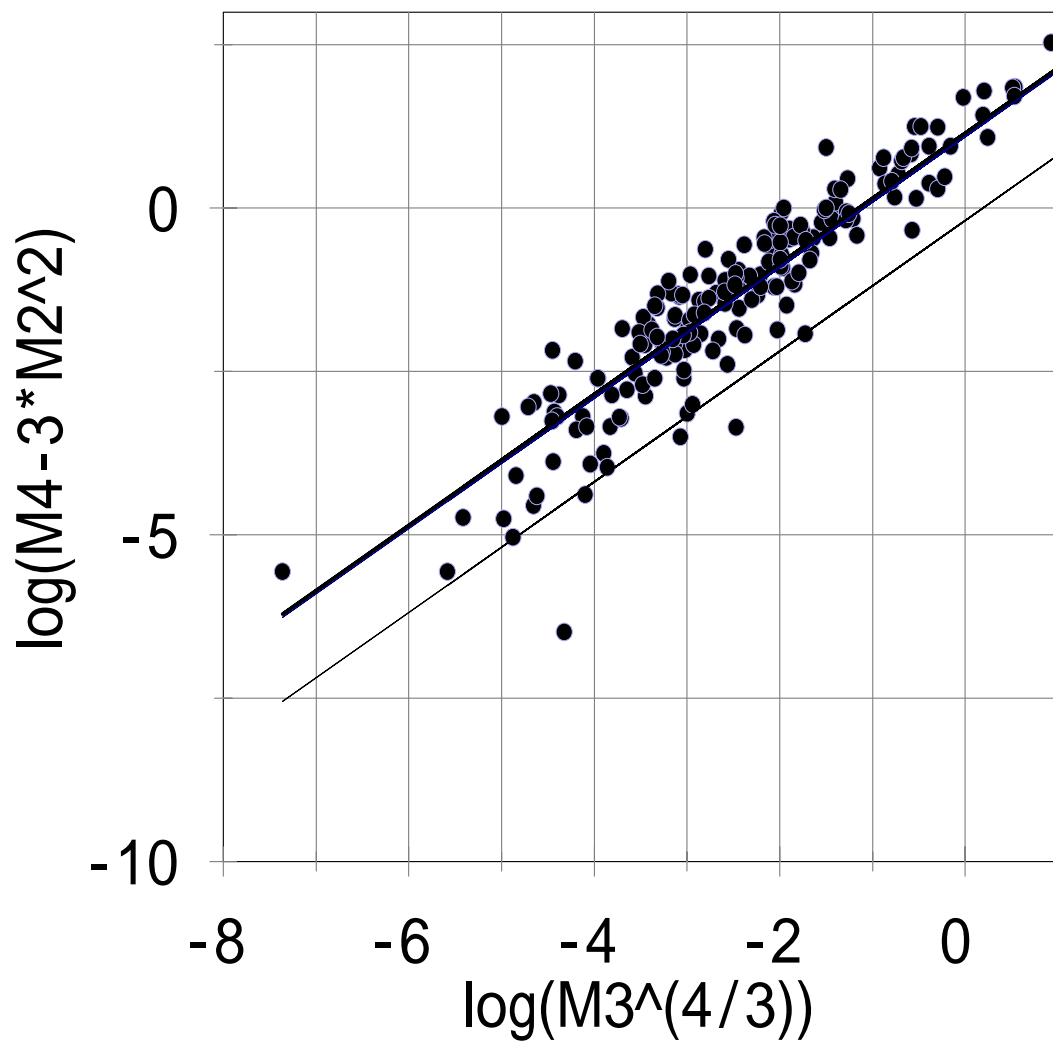


図5.4: 回帰式  $\log(M_{4i} - 3M_{2i}^2) = K_1 + \log |M_{3i}|^{4/3} + \varepsilon_i$  の推計 (2)

表4.2a: 回帰分析による  $K_h$  の推計値のモンテ・カルロ実験の結果、サンプル数 50 のケース

$\rho$ の値	真の $K_h$ の値	$\sigma_v$ の値					
		0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0
1.5	0.300	0.327 (0.141)	0.350 (0.158)	0.569 (0.249)	0.431 (0.324)	0.107 (0.351)	-0.046 (0.385)
1.0	0.875	0.894 (0.184)	0.931 (0.196)	0.926 (0.218)	0.602 (0.338)	0.166 (0.423)	0.037 (0.409)
0.5	1.500	1.550 (0.228)	1.533 (0.241)	1.463 (0.251)	0.832 (0.343)	0.132 (0.405)	0.036 (0.400)
0	2.381	2.391 [0] (0.270)	2.382 [0] (0.283)	2.262 [0] (0.318)	1.405 [0] (0.475)	0.225 [0] (0.415)	0.015 [0] (0.393)
-0.5	4.917	3.408 (0.110)	3.379 (0.154)	2.887 (0.928)	1.989 (1.313)	0.151 (0.478)	0.001 (0.381)

注: 200回試行の平均値、括弧内は標準偏差  $p=0$   $\sigma_v < 0.5$  のセルの鉤括弧内は推計値が3.52を超えたケース数を表す。

表4.2b: 回帰分析による  $K_h$  の推計値のモンテ・カルロ実験の結果、サンプル数 100 のケース

$\rho$ の値	真の $K_h$ の値	$\sigma_v$ の値					
		0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0
1.5	0.300	0.215 (0.100)	0.264 (0.118)	0.485 (0.156)	0.505 (0.275)	0.093 (0.374)	-0.006 (0.359)
1.0	0.875	0.848 (0.106)	0.851 (0.111)	0.938 (0.150)	0.667 (0.307)	0.123 (0.353)	0.047 (0.306)
0.5	1.500	1.564 (0.160)	1.571 (0.159)	1.553 (0.225)	1.002 (0.402)	0.152 (0.393)	0.042 (0.393)
0	2.381	2.646 [17] (0.320)	2.634 [14] (0.306)	2.568 [18] (0.353)	1.757 [7] (0.466)	0.259 [0] (0.412)	0.042 [0] (0.347)
-0.5	4.917	4.456 (0.106)	4.425 (0.167)	4.279 (0.555)	3.069 (1.149)	0.216 (0.495)	0.024 (0.378)

注: 200回試行の平均値、ただし、 $p=0$  のケースだけは1000回試行の平均値、括弧内は標準偏差、また  $p=0$   $\sigma_v < 0.5$  のセルの鉤括弧内は推計値が3.52を超えたケース数を表す。

表4.2c: 回帰分析による  $K_h$  の推計値のモンテ・カルロ実験の結果、サンプル数 200 のケース

$\rho$ の値	真の $K_h$ の値	$\sigma_v$ の値					
		0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0
1.5	0.300	0.130 (0.060)	0.160 (0.071)	0.354 (0.149)	0.493 (0.267)	0.138 (0.364)	0.016 (0.303)
1.0	0.875	0.771 (0.064)	0.780 (0.072)	0.862 (0.133)	0.767 (0.267)	0.192 (0.363)	0.027 (0.341)
0.5	1.500	1.508 (0.108)	1.512 (0.129)	1.516 (0.138)	1.100 (0.259)	0.210 (0.327)	-0.005 (0.348)
0	2.381	2.696 [26] (0.298)	2.695 [15] (0.286)	2.644 [18] (0.305)	1.964 [5] (0.403)	0.358 [0] (0.356)	0.028 [0] (0.343)
-0.5	4.917	5.627 (0.221)	5.662 (0.174)	5.582 (0.218)	4.364 (0.809)	0.396 (0.540)	-0.002 (0.324)

注: 200回試行の平均値、ただし、 $p=0$  のケースだけは1000回試行の平均値、括弧内は標準偏差、また  $p=0$   $\sigma_v < 0.5$  のセルの鉤括弧内は推計値が3.52を超えたケース数を表す。

表4.2d: 回帰分析による  $K_h$  の推計値のモンテ・カルロ実験の結果、サンプル数 500 (3000)のケース

サンプル数	$\rho$ の値	真の $K_h$ の値	$\sigma_v$ の値					
			0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0
500	1.5	0.300	0.058 (0.036)	0.072 (0.040)	0.179 (0.084)	0.436 (0.203)	0.145 (0.273)	0.034 (0.308)
	1.0	0.875	0.719 (0.038)	0.724 (0.039)	0.776 (0.062)	0.741 (0.203)	0.172 (0.323)	0.034 (0.304)
	0.5	1.500	1.442 (0.044)	1.444 (0.053)	1.466 (0.080)	1.204 (0.197)	0.256 (0.312)	0.015 (0.348)
	0	2.381	2.606 [1] (0.162)	2.613 [7] (0.194)	2.603 [4] (0.193)	2.156 [4] (0.280)	0.406 [0] (0.332)	0.054 [0] (0.323)
	-0.5	4.917	7.512 (0.313)	7.540 (0.310)	7.433 (0.282)	5.813 (0.677)	0.412 (0.469)	-0.012 (0.306)
3000	0	2.381	2.451 [0] (0.038)	2.453 [0] (0.040)	2.457 [0] (0.047)	2.339 [0] (0.095)	0.854 [0] (0.312)	0.053 [0] (0.362)

注: 200回試行の平均値、括弧内は標準偏差  $p=0$   $\sigma_v < 0.5$  のセルの鉤括弧内は推計値が3.52を超えたケース数を表す。

表4.3:  $K_h$  の近似式 (4.19) の係数推計値

サンプル・サイズ	$a_N$	$b_N$	$c_N$	$d_N$	$e_N$	$\bar{R}^2$
20	2.1915 (0.0244)	-1.4298 (0.0251)	3.9986 (0.0940)	8.3682 (0.3122)	1.8220 (0.0520)	0.9995
50	2.2108 (0.0251)	-1.4182 (0.0253)	3.0374 (0.0821)	8.2123 (0.3676)	1.4917 (0.0564)	0.9994
100	2.2053 (0.0219)	-1.3902 (0.0215)	2.5039 (0.0692)	7.5235 (0.3261)	1.2404 (0.0477)	0.9995
150	2.1796 (0.0213)	-1.3294 (0.0200)	1.8217 (0.0652)	6.4744 (0.3273)	0.9186 (0.0474)	0.9996
200	2.0978 (0.0224)	-1.1954 (0.0193)	0.8727 (0.0715)	4.9938 (0.4683)	0.6885 (0.0790)	0.9996
300	1.5893 (0.2457)	-0.8185 (0.1320)	0.2947 (0.4584)	2.2275 (1.8786)	-0.3387 (0.4371)	0.9995

注: 式(4.19) の係数の推計値を表す。下段括弧内は推計値の標準偏差である。各推計の自由度は35である。

表5.1 フロンティア生産関数推計のヴァリエーション

	$X_i$ 調整要素	回帰分析	主要生産要素のフィルター
IWD	含める	加重回帰	かける
IWR	含める	加重回帰	かけない
IOD	含める	OLS	かける
IOR	含める	OLS	かけない
EWD	含めない	加重回帰	かける
EWR	含めない	加重回帰	かけない
EOD	含めない	OLS	かける
EOR	含めない	OLS	かけない

表5.2: 有効な産業の事業所数分布

事業所数	有効産業数
21 ~ 29	53
30 ~ 49	83
50 ~ 69	46
70 ~ 99	39
100 ~ 149	49
150 ~ 199	33
200 ~ 499	49
500 ~	18
合計	370

表5.3 回帰残差のモーメント推計値

		回帰分析のバリエーション							
		IWD	IWR	IOD	IOR	EWD	EWR	EOD	EOR
2次のモーメント	最大値	0.942	0.942	0.933	0.933	1.033	1.033	1.026	1.026
	最小値	0.021	0.036	0.021	0.036	0.030	0.040	0.029	0.040
	平均	0.235	0.251	0.233	0.248	0.253	0.269	0.251	0.268
	標準偏差	0.136	0.140	0.134	0.139	0.144	0.148	0.143	0.147
3次のモーメント	最大値	0.434	0.406	0.328	0.377	0.541	0.489	0.479	0.470
	最小値	-2.261	-2.281	-2.178	-2.204	-2.642	-2.642	-2.428	-2.428
	平均	-0.147	-0.134	-0.135	-0.123	-0.157	-0.140	-0.148	-0.132
	標準偏差	0.298	0.291	0.277	0.272	0.323	0.318	0.308	0.304
	0以上	84	97	87	99	90	112	91	110
4次のモーメント	最大値	12.428	12.027	12.301	11.942	13.647	13.260	13.636	13.269
	最小値	0.001	0.004	0.001	0.003	0.004	0.004	0.003	0.004
	平均	0.687	0.736	0.639	0.687	0.772	0.825	0.735	0.790
	標準偏差	1.423	1.425	1.354	1.363	1.573	1.579	1.518	1.530

表5.4:モーメント間の関係推計式

		回帰分析のバリエーション							
		IWD	IWR	IOD	IOR	EWD	EWR	EOD	EOR
回帰分析 (R1)	回帰係数	3.517	3.629	3.634	3.734	3.482	3.565	3.566	3.640
	標準偏差	0.271	0.296	0.295	0.319	0.269	0.295	0.283	0.306
	決定係数	0.900	0.882	0.906	0.884	0.907	0.887	0.912	0.888
回帰分析 (R2)	回帰係数	1.431	1.525	1.458	1.486	1.344	1.556	1.362	1.486
	exp(回帰係数)	4.183	4.596	4.297	4.419	3.836	4.739	3.906	4.419
	標準偏差	0.077	0.072	0.073	0.075	0.064	0.070	0.067	0.075
	決定係数	0.642	0.631	0.696	0.620	0.722	0.623	0.703	0.584
	産業数	335	341	313	325	341	339	326	329

注:回帰分析 (R1) において有効な産業数は 370 である。

表5.5a: 指数巾乗分布にしたがう技術非効率サンプルから推計される回帰係数の性質

$\alpha$	N=50					N=100				
	$\sigma_v^2$					$\sigma_v^2$				
	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
1.0	1.364	1.332	1.351	1.374	1.353	1.293	1.305	1.294	1.306	1.305
	0.923	1.021	1.187	1.385	1.887	0.919	0.951	1.143	1.389	1.892
	-2.302	-2.272	-2.014	-1.760	-1.449	-2.472	-2.380	-2.184	-1.908	-1.558
1.5	1.924	1.973	1.939	1.976	1.986	1.858	1.842	1.858	1.900	1.890
	0.196	0.260	0.431	0.678	1.146	0.170	0.254	0.416	0.642	1.136
	-2.454	-2.050	-1.598	-1.065	-0.733	-2.727	-2.302	-1.709	-1.173	-0.750
2.0	2.642	2.573	2.517	2.471	2.285	2.411	2.415	2.473	2.383	2.334
	0.057	0.135	0.278	0.519	0.952	0.046	0.121	0.274	0.511	0.991
	-2.454	-1.630	-1.077	-0.677	-0.479	-2.936	-1.955	-1.088	-0.729	-0.398
2.5	3.599	3.329	3.085	2.801	2.511	3.350	3.358	3.113	2.787	2.587
	0.022	0.099	0.239	0.453	0.870	0.020	0.095	0.243	0.468	0.919
	-2.089	-1.036	-0.690	-0.515	-0.387	-2.459	-1.149	-0.597	-0.480	-0.287
3.0	4.594	5.021	3.766	3.279	2.661	4.344	4.003	3.338	3.077	2.650
	0.014	0.076	0.211	0.404	0.834	0.013	0.086	0.223	0.443	0.920
	-1.637	-0.268	-0.247	-0.286	-0.245	-1.888	-0.725	-0.539	-0.316	-0.214
3.5	5.743	4.486	3.670	3.175	2.659	5.635	4.274	3.737	3.317	2.865
	0.011	0.079	0.212	0.434	0.852	0.010	0.078	0.218	0.427	0.907
	-1.031	-0.451	-0.376	-0.284	-0.291	-1.195	-0.615	-0.312	-0.251	-0.185
4.0	8.681	4.949	3.926	3.228	2.690	6.929	5.048	3.913	3.203	2.877
	0.009	0.075	0.212	0.404	0.851	0.010	0.081	0.223	0.420	0.917
	-0.229	-0.235	-0.376	-0.244	-0.254	-0.621	-0.262	-0.200	-0.247	-0.177
4.5	8.301	5.123	3.723	3.170	2.649	8.877	5.122	3.888	3.349	2.945
	0.009	0.078	0.213	0.411	0.854	0.009	0.080	0.223	0.429	0.869
	-0.239	-0.278	-0.301	-0.264	-0.264	-0.183	-0.213	-0.200	-0.198	-0.179
5.0	7.950	4.793	3.699	3.196	2.626	8.626	5.195	3.966	3.446	2.773
	0.008	0.078	0.218	0.414	0.843	0.009	0.083	0.219	0.433	0.889
	-0.284	-0.241	-0.274	-0.274	-0.254	-0.203	-0.174	-0.203	-0.175	-0.192
6.0	8.083	4.937	3.777	3.319	2.667	8.708	5.065	3.989	3.284	2.986
	0.009	0.075	0.222	0.419	0.847	0.009	0.083	0.221	0.424	0.865
	-0.269	-0.275	-0.263	-0.251	-0.238	-0.177	-0.174	-0.185	-0.200	-0.172
7.0	8.325	5.100	3.728	3.228	2.717	8.801	5.112	4.021	3.458	2.839
	0.008	0.078	0.212	0.407	0.844	0.009	0.080	0.222	0.437	0.894
	-0.281	-0.242	-0.256	-0.254	-0.226	-0.181	-0.187	-0.212	-0.165	-0.172
11.0	8.533	4.693	3.666	3.266	2.717	8.736	4.980	3.811	3.237	2.749
	0.009	0.076	0.222	0.414	0.817	0.009	0.081	0.225	0.427	0.872
	-0.256	-0.279	-0.249	-0.233	-0.241	-0.179	-0.192	-0.216	-0.209	-0.188
15.0	8.208	5.046	3.716	3.142	2.660	9.165	5.165	3.938	3.326	2.767
	0.008	0.079	0.210	0.421	0.811	0.009	0.080	0.226	0.429	0.874
	-0.282	-0.235	-0.280	-0.256	-0.261	-0.172	-0.195	-0.184	-0.184	-0.190

注: 上段、中段はそれぞれ $\alpha$ 、 $\sigma_v^2$ の推計値、下段は歪度を示している。

表5.5b: 指数巾乗分布にしたがう技術非効率サンプルから推計される回帰係数の性質

$\alpha$	N=150					N=200				
	$\sigma_v^2$					$\sigma_v^2$				
	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
1.0	1.283	1.302	1.283	1.285	1.294	1.274	1.274	1.283	1.270	1.275
	0.869	0.932	1.115	1.322	1.809	0.832	0.918	1.065	1.317	1.858
	-2.533	-2.380	-2.233	-2.010	-1.612	-2.593	-2.485	-2.268	-2.062	-1.635
1.5	1.816	1.823	1.849	1.820	1.853	1.805	1.791	1.817	1.822	1.842
	0.166	0.239	0.403	0.628	1.129	0.150	0.236	0.392	0.627	1.147
	-2.833	-2.395	-1.722	-1.300	-0.761	-2.938	-2.481	-1.815	-1.280	-0.738
2.0	2.351	2.366	2.382	2.349	2.294	2.338	2.311	2.290	2.336	2.330
	0.038	0.111	0.265	0.506	1.006	0.035	0.106	0.268	0.506	1.019
	-3.161	-2.111	-1.209	-0.697	-0.371	-3.254	-2.246	1.277	-0.698	-0.347
2.5	3.218	3.090	3.110	2.928	2.690	3.167	3.015	3.018	2.950	2.747
	0.018	0.088	0.242	0.468	0.932	0.018	0.082	0.239	0.467	0.951
	-2.691	-1.324	-0.627	-0.409	-0.228	-2.795	-1.526	-0.665	-0.369	-0.204
3.0	4.154	3.657	3.509	2.957	2.818	4.060	3.663	3.387	3.069	2.872
	0.012	0.077	0.232	0.449	0.911	0.011	0.080	0.231--	0.461	0.935
	-2.110	-1.096	-0.423	-0.307	-0.172	-2.225	-0.960	-0.434	-0.252	-0.165
3.5	5.234	4.442	3.693	3.463	2.835	5.236	4.588	3.779	3.531	2.924
	0.010	0.078	0.220	0.454	0.900	0.010	0.082	0.224	0.452	0.916
	-1.378	-0.621	-0.309	-0.179	-0.177	-1.329	-0.487	-0.275	-0.152	-0.136
4.0	7.034	5.148	3.956	3.460	2.921	6.837	5.267	3.858	3.385	2.948
	0.010	0.081	0.226	0.440	0.900	0.010	0.083	0.222	0.439	0.915
	-0.612	-0.267	-0.183	-0.156	-0.146	-0.644	-0.223	-0.236	-0.171	-0.127
4.5	8.953	5.180	4.021	3.414	3.307	9.443	5.388	4.295	3.560	2.986
	0.009	0.080	0.216	0.437	0.889	0.009	0.081	0.230	0.441	0.890
	-0.154	-0.191	-0.166	-0.161	-0.139	-0.135	-0.246	-0.147	-0.143	-0.126
5.0	8.807	5.362	4.076	3.300	2.890	9.220	5.583	4.170	3.520	2.949
	0.010	0.083	0.227	0.431	0.875	0.010	0.083	0.225	0.455	0.907
	-0.159	-0.169	-0.167	-0.180	-0.176	-0.132	-0.122	-0.151	-0.133	-0.136
6.0	8.998	5.189	4.197	3.661	2.866	9.397	5.266	4.184	3.524	2.961
	0.009	0.080	0.226	0.446	0.890	0.010	0.081	0.229	0.447	0.903
	-0.163	-0.173	-0.135	-0.135	-0.158	-0.123	-0.143	-0.123	-0.126	-0.129
7.0	9.078	5.413	4.022	3.496	2.844	9.548	5.360	4.240	3.505	2.866
	0.009	0.081	0.223	0.446	0.890	0.010	0.083	0.230	0.443	0.895
	-0.163	-0.153	-0.157	-0.150	-0.158	-0.106	-0.128	-0.126	-0.137	-0.140
11.0	9.069	5.069	4.079	3.477	2.798	9.333	5.436	4.305	3.614	3.044
	0.009	0.080	0.226	0.435	0.900	0.009	0.083	0.227	0.451	0.916
	-0.151	-0.172	-0.153	-0.159	-0.167	-0.133	-0.132	-0.113	-0.127	-0.130
15.0	9.249	5.296	4.299	3.575	2.881	9.161	5.327	4.132	3.494	2.858
	0.009	0.081	0.223	0.443	0.907	0.009	0.080	0.225	0.438	0.896
	-0.152	-0.151	-0.141	-0.141	-0.149	-0.136	-0.145	-0.147	-0.133	-0.145

表5.6: モーメント間の関係を推計する修正された回帰分析の結果

		回帰分析のバリエーション							
		IWD	IWR	IOD	IOR	EWD	EWR	EOD	EOR
回帰分析 (R3)	回帰係数	3.520	3.638	3.638	3.732	3.487	3.573	3.573	3.642
	標準偏差	0.272	0.299	0.296	0.321	0.271	0.299	0.285	0.309
	決定係数	0.891	0.869	0.895	0.875	0.898	0.879	0.903	0.882
	$p$ の推計値	-0.325	-0.346	-0.346	-0.362	-0.319	-0.335	-0.335	-0.347
	$p$ の推計値 A	-0.150	-0.170	-0.170	-0.186	-0.144	-0.159	-0.159	-0.171
	$p$ の推計値 B	-0.287	-0.325	-0.325	-0.358	-0.276	-0.304	-0.304	-0.327
回帰分析 (R4)	回帰係数	1.107	1.323	1.185	1.239	1.213	1.342	1.224	1.303
	exp(回帰係数)	3.025	3.755	3.271	3.452	3.364	3.827	3.401	3.680
	標準偏差	0.055	0.044	0.042	0.053	0.042	0.044	0.041	0.048
	決定係数	0.801	0.843	0.865	0.826	0.851	0.848	0.865	0.840
	$p$ の推計値	-0.216	-0.366	-0.275	-0.312	-0.295	-0.377	-0.302	-0.354
	$p$ の推計値 A	-0.061	-0.190	-0.107	-0.138	-0.123	-0.203	-0.129	-0.177
	$p$ の推計値 B	-0.139	-0.367	-0.210	-0.265	-0.238	-0.393	-0.249	-0.340
産業数		198	155	178	147	185	150	175	147

注: 歪度が-0.5以下のサンプルを対象として行った回帰分析の結果を用いている。 $p$  の推計値 は理論式 ( ) によって、回帰係数から  $p$  を推計したものである。 $p$  の推計値 は、バイアスの存在を考慮してバイアスの修正式 ( ) を用いて  $p$  を推計したものである。ただし、A は、サンプルサイズとして平均値 137.85 を、B は中央値 72 を用いて推計している。

表5.7: 対数変換された変数を用いた回帰分析による  $K_h$  の推計値(モンテ・カルロ実験の結果)

	事業所 数	$\sigma_v$ の値					
		0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0
平均 と 標準偏差  真の値 0.8676	50	0.103 (0.056)	0.098 (0.059)	0.103 (0.068)	0.256 (0.104)	0.490 (0.194)	0.591 (0.265)
	100	0.362 (0.041)	0.357 (0.044)	0.310 (0.047)	0.361 (0.076)	0.693 (0.156)	0.864 (0.156)
	200	0.572 (0.027)	0.563 (0.026)	0.523 (0.034)	0.456 (0.058)	0.804 (0.145)	1.080 (0.251)
	500	0.723 (0.018)	0.721 (0.019)	0.706 (0.020)	0.631 (0.035)	0.836 (0.109)	1.300 (0.225)
	3000	0.843 (0.011)	0.842 (0.010)	0.840 (0.011)	0.831 (0.012)	0.739 (0.052)	1.508 (0.188)
95% 分位 両側	50	-0.018 ~ 0.211	-0.026 ~ 0.205	-0.033 ~ 0.231	0.050 ~ 0.447	0.129 ~ 0.869	0.039 ~ 1.122
	100	0.284 ~ 0.441	0.273 ~ 0.441	0.215 ~ 0.397	0.202 ~ 0.505	0.397 ~ 1.009	0.378 ~ 1.367
	200	0.517 ~ 0.623	0.509 ~ 0.614	0.454 ~ 0.589	0.338 ~ 0.564	0.517 ~ 1.084	0.614 ~ 1.586
	500	0.687 ~ 0.758	0.684 ~ 0.759	0.666 ~ 0.744	0.560 ~ 0.699	0.622 ~ 1.047	0.841 ~ 1.719
	3000	0.824 ~ 0.868	0.821 ~ 0.866	0.819 ~ 0.860	0.809 ~ 0.853	0.613 ~ 0.855	1.135 ~ 1.901
95% 分位 片側	50	0.192	0.189	0.210	0.419	0.810	1.026
	100	0.430	0.429	0.385	0.481	0.956	1.302
	200	0.614	0.606	0.579	0.547	1.044	1.484
	500	0.752	0.755	0.739	0.688	1.019	1.667
	3000	0.863	0.857	0.858	0.850	0.821	1.804