

1部5章

174頁 残差と予測残差:追加説明(上級)

(3.26)式に示されるように回帰残差は

$$(3.26) \quad \hat{u} = y - \hat{y} = \{I - X(X'X)^{-1}X'\}y$$

と計算されるが、誤差項ベクトルを用いて表示すると

$$(A1) \quad \hat{u} = \{I - X(X'X)^{-1}X'\}\varepsilon$$

となる。したがって \hat{u} の分散共分散行列は

$$(A2) \quad V(\hat{u}) = E(\hat{u}\hat{u}') = \sigma^2\{I - X(X'X)^{-1}X'\}$$

となる。特定の残差については

$$(A3) \quad V(\hat{u}_t) = \sigma^2(1 - h_{tt}), \quad h_{tt} = x_t'(X'X)^{-1}x_t \quad t=1, \dots, n$$

と記することは既に述べた。 x_t' は X 行列の第 t 行である。標準化残差は

$$(A4) \quad \frac{\hat{u}_t}{\sigma\sqrt{1-h_{tt}}}$$

となる。

全観測値から第 t 観測値を除いた y および X を $y(t)$ および $X(t)$ とする。第 t 観測値を除いた最小 2 乗推定量は

$$(A5) \quad b(t) = (X(t)'X(t))^{-1}X(t)'y(t)$$

となるが、 $b(t)$ を用いて第 t 観測値 y_t を予測し、その**予測誤差**を求めると

$$(A6) \quad \hat{u}^* = y_t - x_t'b(t)$$

と定義できる。ところが、証明は後で示すが、残差と予測誤差には

$$(A7) \quad \hat{u}_t^* = \frac{\hat{u}_t}{1-h_{tt}}$$

という関係がある。この等式によれば、予測誤差は全観測値を用いた回帰残差を $(1-h_{tt})$ で割れば求まり、あらためて予測残差を計算する必要はない。各変数の**影響度**を調べるような分析は、比較的観測個数が大きいクロスセクション分析で使われるが、観測個数が 1000 程もあれば(A7)式を求めるにはかなりの計算時間がかかる。したがって、(A7)式の分母の計算には要領の良いプログラムが必要で

ある.特に逆行列の計算を避ける工夫が必要である.この等式により

$$(A8) \quad V(\hat{u}_t^*) = \frac{V(\hat{u}_t)}{(1-h_{tt})^2} = \frac{\sigma^2}{1-h_{tt}}$$

となる.標準化予測誤差 (\hat{u}_t^* を標準化した統計量) は

$$(A9) \quad \frac{\sqrt{1-h_{tt}}}{\sigma} \hat{u}_t^*$$

であるが, (A7) により σ の推定量が共通であれば標準化残差と標準化予測誤差統計量は一致する.

(A7)式の証明 $b = (X'X)^{-1}X'y$ とすれば, 係数の**更新公式** (up-dating formula)

により

$$(A10) \quad b = b(t) + \frac{1}{1+x_t'(X(t)'X(t))^{-1}x_t} (X(t)'X(t))^{-1}x_t(y_t - x_t'b(t))$$

となる.したがって

$$(A11) \quad \hat{u}_t = \hat{u}_t^* - \frac{x_t'(X(t)'X(t))^{-1}x_t}{1+x_t'(X(t)'X(t))^{-1}x_t} \hat{u}_t^* = \frac{1}{1+x_t'(X(t)'X(t))^{-1}x_t} \hat{u}_t^*$$

となる.ところで $X'X = X(t)'X(t) + x_t x_t'$ であるから, 逆行列

に関する**更新公式** (up-dating formula) を変型すると

$$(A12) \quad (X(t)'X(t))^{-1} = (X'X - x_t x_t')^{-1} = (X'X)^{-1} + \frac{1}{1-h_{tt}} (X'X)^{-1} x_t x_t' (X'X)^{-1}$$

だから, x_t' と x_t を前後から掛ければ

$$(A13) \quad 1+x_t'(X(t)'X(t))^{-1}x_t = 1+h_{tt} + \frac{(h_{tt})^2}{1-h_{tt}} = \frac{1}{1-h_{tt}}$$

と簡略化できる.従って(A7)が求まる.(終わり)

ダミー変数回帰 第 t 点で 1 をとるダミー変数 D_t を使った回帰を使えば, 予測誤差はダミー変数の係数推定量として求まる.この回帰についての説明を続けよう. t 点で 1 をとる一点ダミー変数を D_t と記せば, 回帰式は

$$(A14) \quad y_i = x_i' \beta + D_i \delta \quad i=1, 2, \dots, n$$

となる。一点ダミー D_t がもたらす結果をまとめよう。

1. 第 t 点においては残差は 0 となる。
2. 他の点の残差は, $(n-1)$ 点の観測値を使った回帰残差に一致する。
3. D_t の係数推定量は**予測誤差**に等しく, t 統計量は標準化予測誤差に等しい。

証明 最小 2 乗推定量の基準にもどると

$$(A15) \quad \sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \beta - D_i \delta)^2 = \sum_{i \neq t} (y_i - x_i' \beta)^2 + (y_t - x_t' \beta - \delta)^2$$

となるから $\hat{\delta} = y_t - x_t' b(t) = \hat{u}_t^*$, $b(t)$ は t 点を除いた 2 乗和の最小化から求まる。

ダミー変数の係数推定量は予測誤差に一致する。 $\hat{\delta}$ に関する t 統計量は

$$(A16) \quad t_{\delta} = \frac{\sqrt{1-h_{tt}}}{\hat{\sigma}} \hat{u}_t^*$$

となり, 標準化予測誤差に等しい。ただし, $\hat{\sigma}^2$ の推定に使われる残差変動は, t 点を除いた回帰の残差変動になっている。(終わり)

練習問題解答

問2. ラグランジ乗数検定は, 人工的に作った回帰式

$$\varepsilon_t = c_1 \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \phi} + c_2 \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \beta_1} + c_3 \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \beta_2} + \dots + c_{K+1} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \beta_K} + \text{誤差項}$$

を基にする。実際の検定においては, 左辺は帰無仮説の下で評価する。帰無仮説の下では $\varepsilon_t = u_t$ となり, かつ u_t は帰無仮説の下で評価すればよいが, これは 147 頁の(4.7)式で定められる残差, あるいは(5.4)式に一致する。右辺についても同様で, 各一次微分を帰無仮説の下で評価すればよい。

$\varepsilon_t = y_t - \phi y_{t-1} - \beta_1(x_{1t} - \phi x_{1,t-1}) - \dots - \beta_K(x_{Kt} - \phi x_{K,t-1})$, だから, 帰無仮説の下で, 一次微分は $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \phi} = -u_{t-1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \beta_k} = -(x_{kt} - \phi x_{k,t-1})_{\phi=0} = -x_{kt}$, $k=1, 2, \dots, K$, などとなる。

これは(16)式の説明変数である。

問4 最小2乗推定量を分解すると $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n x_{1t}^* u_t}{\sum_{i=1}^n (x_{1t}^*)^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n x_{1t}^* (\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})}{\sum_{i=1}^n (x_{1t}^*)^2}$

となる。右辺第二項の期待値は0であるから、最小2乗推定量は不偏となる。分散を計算するには、この項の分子を、同じ期の ε で整理する。例えば第1期ならば、 $x_{11}^* \varepsilon_1 + x_{12}^* \theta \varepsilon_{2-1}$ が同期の ε となる。この項は $(x_{11}^* + x_{12}^* \theta) \varepsilon_1$ となる。この様な項は、 $x_{12}^* \theta \varepsilon_1, (x_{12}^* + x_{13}^* \theta) \varepsilon_2, (x_{13}^* + x_{14}^* \theta) \varepsilon_3, \dots, (x_{1n-1}^* + x_{1n}^* \theta) \varepsilon_{n-1}, x_{1n}^* \varepsilon_n$ まで存在する。かつこの様な項は異なる ε を含んでいるので、互いに独立である。したがって、分子の分散は、

$$E\{x_{12}^* \theta \varepsilon_1 + \sum_{t=2}^{n-1} (x_{1t}^* + x_{1t+1}^* \theta) \varepsilon_t + x_{1n}^* \varepsilon_n\}^2 = \sigma^2 \{(x_{12}^* \theta)^2 + \sum_{t=1}^{n-1} (x_{1t}^* + x_{1t+1}^* \theta)^2 + (x_{1n}^*)^2\}$$

となる。分母は定数の和からなるから、2乗を求めるだけでよい。

問5 $r \approx \frac{\sum u_t u_{t-1}}{\sum u_t^2}$. nについての確率極限を計算すると、

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} = \text{Cov}(u_t, u_{t-1}), \quad p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t^2 = V(u_t) . \text{ 従って,}$$

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} (r) = \frac{\text{Cov}(u_t, u_{t-1})}{V(u_t)} = \text{Corr}(u_t, u_{t-1}) = \frac{\theta}{1 + \theta^2} \text{ である. (このような確率極限の}$$

計算には、高度の知識が要請される。)最後の等式は、 u の分散共分散行列から導かれる。

問6 注:この問題はBです。またt統計量は、 ϕ 係数に関するものです。

96頁の(3.51)式によれば、追加変数に関するt統計量の2乗は、追加変数に関するF統計量に等しい。(これはよく知られている。)ここでは、追加変数とは \hat{u}_{t-1} であるから、 ϕ 係数に関するt統計量の2乗が、追加変数 \hat{u}_{t-1} に関するF統計量に一致する。したがって、(5.18)式における最初の等号は自明である。

第二の等号を証明しよう。(5.16)式をにおいて、左辺の被説明変数は(5.4)

式で定義される \hat{u}_t である。あるいは、帰無仮説 $\phi = 0$ のもとで、(5.16) 式を推定してもとまった残差である、といってもよい。そしてこの \hat{u}_t は、残差の性質により K 個の説明変数と直交している。だから、帰無仮説 $\phi = 0$ の下で (5.16) 式を推定してもとまる各回帰係数の推定値は 0 になる。さらに、帰無仮説 $\phi = 0$ の下での (5.16) 式の RSS は、 \hat{u}_t の 2 乗和であり、残差の平均は 0 であるから、TSS に一致する。(K 個の説明変数の一つは定数である。) つまり、 $RSS(H_0) = TSS$ となる。

F 統計量は帰無と対立の下での RSS によって定義さ

れ、 $F = \frac{n-K-1}{1} \frac{RSS(H_0) - RSS(H_A)}{RSS(H_A)}$ となる。 $RSS(H_A)$ は、(5.16) 式の残差 2 乗和で

ある。ところが $RSS(H_0) = TSS$ だから、この F 統計量は $(n-K-1) \frac{TSS - RSS(H_A)}{RSS(H_A)}$ と

書け、(5.18) 式の右端が導かれる。

問7 誤差項は問 2 と同様に AR(1) に従っている。問 2 と同様にすれば良い。

問 8 1) $u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$ の両辺に y_{t-1} をかけて期待値をもとめると、

$$E(u_t y_{t-1}) = \phi E(u_{t-1} y_{t-1}) + E(\varepsilon_t y_{t-1}) = \phi E(u_{t-1} y_{t-1}).$$

2) $y_t = \gamma y_{t-1} + u_t$ の両辺に u_t をかけて期待値をとると、 $E(y_t u_t) = \gamma E(y_{t-1} u_t) + E(u_t^2)$
 $= \phi \gamma E(u_{t-1} y_{t-1}) + E(u_t^2)$ 、定常性により $E(y_t u_t) = \sigma_u^2 (1 - \phi \gamma)$ 。

3) y_t を 2 乗して期待値を取ると、 $E(y_t^2) = \gamma^2 E(y_{t-1}^2) + 2\gamma E(u_t y_{t-1}) + E(u_t^2)$ 。

定常性により、 $E(y_t^2) = (\sigma_u^2 + 2\gamma E(u_t y_{t-1})) / (1 - \gamma^2)$ 。

1), 2) の結果を 3) に代入し、整理すると $p \lim \frac{\sum y_{t-1} u_t / T}{\sum y_t^2 / T} = \frac{E(y_{t-1} u_t)}{E(y_t^2)} = \frac{\phi(1 - \gamma^2)}{1 + \gamma \phi}$ 。

問 9 $\hat{\beta} = \frac{\sum (x_t - \bar{x}) y_t}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \beta + \delta \frac{\sum (x_t - \bar{x}) z_t}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + \frac{\sum (x_t - \bar{x}) \varepsilon_t}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$ 。 z_t が定数項と x_t とに直

交、 $\sum z_t = 0, \sum x_t z_t = 0$ であれば明らかにバイアス項は消える。

問 11 1) 略 . 2) $(\sum \frac{1}{2\sigma_i^2} g_i w_i)^2 = \sum_i \sum_j \frac{1}{4\sigma_i^2 \sigma_j^2} g_i g_j w_i w_j, E(g_i g_j) = 2(i = j),$

$E(g_i g_j) = 0(i \neq j)$ より .

問 12 1) $\varepsilon_t = y_t - \phi y_{t-1} - \gamma(y_{t-1} - \phi y_{t-2})$ より . 2) 問 8 と同様にすればよい .

$E(y_t y_{t-1}) = \gamma E(y_t^2) + E(u_t y_{t-1}), \sigma_u^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$. (9)式を参考にする . この問により , 最

尤推定量の共分散行列およびその一致推定量

は , $\sqrt{n} \text{cov}(\hat{\gamma}, \hat{\phi}) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1/(1-\gamma^2), & 1/(1-\phi\gamma) \\ 1/(1-\phi\gamma), & 1/(1-\phi^2) \end{pmatrix}^{-1}, n \begin{pmatrix} \sum \hat{v}_t^2 & \sum \hat{v}_t \hat{u}_{t-1} \\ \sum \hat{u}_{t-1} \hat{v}_t & \sum \hat{u}_{t-1}^2 \end{pmatrix}^{-1}$

で与えられることが分かる . この推定法はラグ付き変数の有無にかかわらず使えるから , 便利がよい . 2) は括弧内を一個の変数と考える . この問は畠中道雄による推定法の , 異なる導出を示す .

1 部 6 章

練習問題解答

問 10 正規方程式は $\sum_{i=1}^T x_{ki} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{1i} - \dots - \beta_K x_{Ki} - dTD_{10}) = 0 \quad (k = 1 \dots K),$

$y_{54} - \beta_0 - \beta_1 x_{1,54} - \dots - \beta_K x_{K,54} - d = 0$. 後式から d を求め前式に代入すると , 前式から 54 年を除く結果になる .

二部

7 章

練習問題解答

問 5 AR(2) の AC 関数の項を参照して計算する .

問 6 p 次の自己回帰において行う . $X_t = \mu + \sum_{k=1,3} \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t$ より ,

$E(X_t) = \mu / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_3) = m$ を得て, 元の式の平均を調整すれ

ば, $X_t - m = \sum_{k=1,3} \phi_k (X_{t-k} - m) + \varepsilon_t$ となる. 両辺に $X_t - m$ を掛けて期待値をとり

整理すると, 最終項については $E(X_t - m)\varepsilon_t = E\{(\sum_{k=1,3} \phi_k (X_{t-k} - m) + \varepsilon_t)\varepsilon_t\} = \sigma^2$

だから, $\gamma(0) = \sigma^2 / (1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \phi_3\rho(3))$ となる. 次に $E((X_{t-1} - m)\varepsilon_t) = 0$ に

注意して, 両辺に $(X_{t-1} - m)$ を掛けて期待値をとり $\gamma(0)$ で両辺を割ると

$\rho(1) = \phi_1 + \rho(1)\phi_2 + \rho(2)\phi_3$, $(X_{t-2} - m)$ を掛けて $\gamma(0)$ で両辺を割ると

$\rho(2) = \rho(1)\phi_1 + \phi_2 + \rho(1)\phi_3$, となる. 未知数は 2 個なので $\rho(1)$ と $\rho(2)$ が解ける. より

高次については, $\rho(3) = \rho(2)\phi_1 + \rho(1)\phi_2 + \phi_3$, といった定差方程式が使える. 3 次ま

での自己相関を使えば共分散が定まる. 解けば $\rho(1) = \frac{\phi_1 + \phi_2\phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1\phi_3 - \phi_2\phi_3 - \phi_3^2}$. あ

とは, 高次の式に代入すればよい.

問 7 PAC 関数は $\text{pac}(1) = \rho(1)$, 2 次の式 $\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \text{pac}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \end{pmatrix}$ を解い

て, $\text{pac}(2) = (\rho(2) - \rho(1)^2) / (1 - \rho(1)^2)$, 3 次の式を解けば $\text{pac}(3) = \phi_3$, 4 次の式を解けば $\text{pac}(4) = 0$ となる.

問 8 問題文を理解すればよい.

問 9 1. 分母を n で割ると分散 σ^2 に収束する. 分子の X を分母の σ で標準化すれば, 分子の X は平均 0 分散 1 になるので, 漸近的にこのように近似できる.

$$2. V(r) = \frac{1}{n^2} E(\sum X_t X_{t-1})^2 = \frac{1}{n^2} E(\sum X_t^2 X_{t-1}^2) = \frac{1}{n^2} \sum E(X_t^2) E(X_{t-1}^2) = \frac{1}{n}.$$

(X の分散は 1 である. 独立性により交差する項の期待値は全て 0 となる.)

3. 前問と同様だが, 1 項ずれた交差項については $E(X_t X_{t-1} X_{t-2} X_{t-3}) = \rho_1^2$ となる.

$$\begin{aligned} \text{したがって } V(r_2) &= \frac{1}{n^2} E(\sum X_t X_{t-2})^2 = \frac{1}{n^2} \{E(\sum X_t^2 X_{t-2}^2) + 2E(\sum X_t X_{t-1} X_{t-2} X_{t-3})\} \\ &= \frac{1}{n^2} (n + 2n\rho_1^2) = \frac{1}{n} (1 + 2\rho_1^2). \end{aligned}$$

4. この時は 1 項ずれた交差項で $E(X_t X_{t-1} X_{t-3} X_{t-4}) = \rho_1^2$, 2 項ずれた交差項で

$$\begin{aligned}
E(X_t X_{t-2} X_{t-3} X_{t-5}) &= \rho_2^2 \text{となる. したがって, } V(r_3) = \frac{1}{n^2} E(\sum X_t X_{t-3})^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \{E(\sum X_t^2 X_{t-3}^2) + 2E(\sum X_t X_{t-1} X_{t-3} X_{t-4}) + 2E(\sum X_t X_{t-2} X_{t-3} X_{t-5})\} \\
&= \frac{1}{n} (1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2).
\end{aligned}$$

9章

練習問題解答

問6 $V(\eta_n / \sqrt{n}) = \sigma^2$ は容易に分かる. 係数推定量の分母と分子を σ^2 で割れば, 各 ε_t を σ で割った表現が導かれる. 更に, X_{t-1} を η_{t-1} に置き換えれば最終式をえる.

問7 問6の変型だが, 誤差分散を σ^2 に置き換えればよい.

問8 回帰式 $y_t = \gamma x_t + u_t$ の係数の最小2乗推定量は以下の通りである.

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (\alpha t + \varepsilon_t)(\beta t + \omega_t)}{\sum (\beta t + \omega_t)^2} = \frac{\alpha \beta \sum t^2 + \alpha \sum t \omega_t + \beta \sum t \varepsilon_t + \sum \varepsilon_t \omega_t}{\beta^2 \sum t^2 + 2\beta \sum t \omega_t + \sum \omega_t^2}.$$

$E(t\varepsilon_t) = E(t\omega_t) = E(\varepsilon_t \omega_t) = 0$, $V(t\varepsilon_t) = t^2 \sigma_\varepsilon^2$, $V(t\omega_t) = t^2 \sigma_\omega^2$, $V(\varepsilon_t \omega_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\omega^2$ であり, $\sum t^2 = O(n^3)$ (n^3 で割れば極限で定数に収束する.) である. 分母分子を n^3 で除して極限を求めれば,

$$\lim \sum t^2 / n^3 = 1/3, \text{plim } \sum t \omega_t / n^3 = 0, \text{plim } \sum \varepsilon_t \omega_t / n^3 = 0, \text{plim } \sum \omega_t^2 / n^3 = 0$$

を得る. 以上から $\text{plim } \hat{\gamma} = \alpha / \beta$ である.

10章

練習問題解答

問1 (1)の b_x, b_y の推定量 \hat{b}_x, \hat{b}_y が一致することは明らかである. ここで(2)の推定量を \hat{c}_x, \hat{c}_y , (3)の推定量を $\hat{\gamma}, \hat{c}_x^*, \hat{c}_y^*$ とし, $\hat{c}_x^* = \hat{c}_x - \hat{\gamma} \hat{b}_x$, $\hat{c}_y^* = \hat{c}_y - \hat{\gamma} \hat{b}_y$ を示せばよい. 1部3章の手順に従い x_t を x_{t-1} と y_{t-1} に回帰した残差を x_t^* と定義すれば, $x_t^* = x_t - \hat{b}_x x_{t-1} - \hat{b}_y y_{t-1}$ となる. だから, (3)は $y_t = \gamma x_t^* + (c_x^* + \gamma \hat{b}_x) x_{t-1} + (c_y^* + \gamma \hat{b}_y) y_{t-1} + \text{error}$ と恒等的に変換できる. x_t^* と他の

ラグ変数が直交しているため, x_{t-1} と y_{t-1} の係数推定量は(2)式の係数推定量 \hat{c}_x, \hat{c}_y に一致する. したがって先の等式が成立する.

問2 (1) (2)の残差を各々 ex_t, ey_t と置く. $(\sigma_{xy}/\sigma_{xx})$ の推定量は $\sum (ex_t)(ey_t)/\sum (ex_t)^2$ である. 前問より ex_t は x_t^* に他ならない. 前問より (3)の γ の推定量は, $\sum (ex_t)y_t/\sum (ex_t)^2$ となるが, 分子は同値である.

問3 $\eta_{xt} = \varepsilon_{xt} - \gamma_x \varepsilon_{zt}$ で, ε_{zt} と独立であるために $\gamma_x = \sigma_{xz}/\sigma_{zz}$ である.

$$E(\eta_{xt}\varepsilon_{zt})=0.$$

問5 $\eta_{yt} = \varepsilon_{yt} - \gamma_y \varepsilon_{zt}$, $\gamma_y = \sigma_{yz}/\sigma_{zz}$ である. 従って, $E(\eta_{xt}\eta_{yt}) = E(\eta_{xt}\varepsilon_{yt}) = \sigma_{xy} - (\sigma_{xz}\sigma_{yz}/\sigma_{zz})$ を得る.

問10 $E(\varepsilon_y - \gamma\varepsilon_x)^2$ を展開してから期待値を計算し, 整理する.

11章

解説(追加)

誤差修正モデル(11章3節)はAからEまでに分類されている. これらの五モデルには大した差が無いと思われるかもしれないが, 例えばBとCでは次のような差がある.

Bは定数項に制約があり, VARの定数項は長期均衡式の定数項に組み込まれてしまう. この場合(11.15)および長期均衡式より

$$(11.15') \quad \Delta z_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} v_t + \varepsilon_t$$

と理論的な表現が導かれる. 初期値を z_0 として累積和をとると, この式は,

$$(11.15'') \quad z_t = z_0 + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^t v_i + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

とI(1)変数および初期値の和として表現できる. 他方Cは

$$(11.17') \quad \Delta z_t = \mu + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} v_t + \varepsilon_t$$

となるから,累積和をとれば

$$(11.17'') \quad z_t = z_0 + t\mu + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^t v_i + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

となる.

明らかのように(11.15'')は z_0 周辺での和分変動を示し,(11.17'')は(z_0 +確定トレンド)周辺での和分変動を示す.モデルDとEの差も,同じ手法で導くことができる.特にEは(確定トレンド)の2乗項が含まれる.

練習問題解答

問9 誤差項の定義が重要だが,誤差項が与えられれば明らか.VMAからECMが導出できることは重要で,VAR,ECM,VMAに関する表現定理とよばれる.

問10 $x_t = \delta z_t + \omega_t$ は,誤差項定常で通常の共和分回帰となり, δ は一致推定できる. $y_t = \beta(\delta z_t + \omega_t) + \gamma z_t + u_t = (\beta\delta + \gamma)z_t + \beta\omega_t + u_t$ より,誤差項定常となって共和分回帰になり,一致推定できる. $y_t - (\beta\delta + \gamma)z_t = \beta\omega_t + u_t$ は誤差項は標準で,一致推定できる.