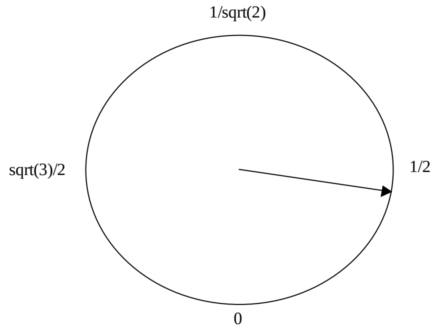
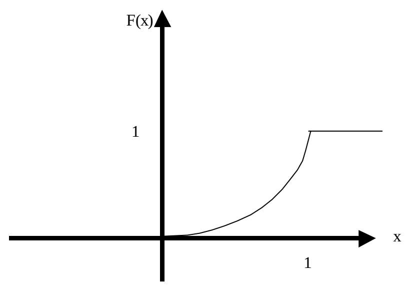
第 3 章

連続な標本空間の例 図のように距離の平方根でメモリをうった円において,ルーレットのように針を回転し,停止した位置のメモリの値を確率変数とする.確率変数を X とすると X が座標値 x より小さい値を取る確率は,原点 0 から座標 x までの距離に等しい.ところが,原点から座標 x までの距離は x の 2 乗になる.



例 3.5 $x < 0$ なら $F(x) = 0$, $0 \le x \le 1$ なら $F(x) = x^a$, $x > 1$ なら $F(x) = 1$ と定義される. $0 \le F(x) \le 1$ かつ $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$. さらに $x \le y$ のとき $F(x) \le F(y)$ なので, $F(x)$ は分布関数の性質を満たす.



例 3.6 $x \le 0$ なら $F(x) = 0$, $0 \le x \le 1/2$ なら $F(x) = x^2$, $1/2 \le x \le 1$ なら $F(x) = 1 - 3(1 - x)^2$, $1 \le x$ なら $F(x) = 1$ だから, $0 \le F(x) \le 1$ かつ $F(-\infty) = 0, f(\infty) = 1$.
さらに, $x \le y$ なら $F(x) \le F(y)$ だから, $F(x)$ は分布関数の性質を満たす.

密度関数は $f(x) = 0(x \le 0),\ 2x(0 \le x \le 1/2),\ 6 - 6x\ \ (1/2 \le x \le 1),\ 0(x \ge 1)$ となる.

期待値の意味　確率変数 X が有限の値 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ を，確率 $P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_m)$ をもってとるとする．この場合，値　$x_1, x_2, \cdots, x_m$　の算術平均は，$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i$ となる．この式では各値が生じる可能性（確率）は考慮されていない．重み（1/n）の和は１である．他方，期待値

$$E(X) = P(x_1)\,x_1 + P(x_2)\,x_2 + \cdots + P(x_m)\,x_m = \sum_{i=1}^{m} x_i\ P(x_i)$$

は，各値をその値が生じる確率で重みづけした加重平均である．重みの和は１になる．繰り返すが，x_i の発生する可能性を考慮して，確率 $P(x_i)$ で重みづける．つまり起こりにくい値には小さな重みを与え，起こりやすい値には大きな重みを与えており，理にかなう．

$E(X)$ と同じく，分散 $V(X)$ は，$\mu = E(X)$ からの偏差の２乗

$$(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \cdots, (x_m - \mu)^2$$

を，各値の生じる可能性によって重みづけした平均 $\sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2\ P(x_i)$ である．

コーシー･シュワルツ不等式

簡便のため $E(X) = E(Y) = 0$ とし,二個の確率変数の任意の線形関数, $X \pm \rho Y$ の分散を求めると, $V(X \pm \rho Y) = V(X) \pm 2\rho\ COV(X, Y) + \rho^2 V(Y) \geq 0$ となる.分散は非負だから,この式を ρ に関する二次式とみなせば,判別式は負または 0 にならないといけない.この判別式より，コーシー・シュワルツ不等式が得られる.

判別式が負になるときは実根は存在しない.二次式は上向きで x 軸（横軸）と交差せず,常に正である.判別式が０になるときは重根が存在し, $V(X \pm \rho Y) = 0$ となる重根 ρ を定めることができる．こ分散が０だから、この ρ について $X \pm \rho Y = 0$ となる。つまり二個の確率変数の間に線形関係がある.

二項分布 B(n, p) に従う確率関数の平均値と分散の計算(3.31)

あるベルヌーイ試行において事象 A の起こる確率を p とする. n 回の独立試行を行うから､確率変数 X_k は A が起これば 1,起こらなければ 0 の値をとる. だから, $P(X_k=1)=p,\ P(X_k=0)=q,\ \ q=1-p$ である. したがって,平均と分散は

$$E(X_k)=1p+0q=p,\ \ E({X_k}^2)=1^2p+0^2q=p,$$

$$V(X_k)=E({X_k}^2)-\{E(X_k)\}^2=p-p^2=p(1-p)=pq\,.$$

今, $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$ とおくと,X も確率変数である. この X は,n 回の試行のうち A が起こる回数を示すから,二項分布 B(n, p) に従う.

期待値は, $E(X)=E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}p=np$. 確率変数 X_k は互いに独立であるから,X の分散は次のように分解できる.

$$V(X)=V(\sum_{k=1}^{n}X_k)=E\{(\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k))^2\}=E\{(\sum_{k=1}^{n}X_k-np)^2\}$$

$$=E\{[(X_1-p)+\cdots+(X_n-p)]^2\}=E\{(X_1-p)^2\}+\cdots+E\{(X_n-p)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)=\sum_{k=1}^{n}pq=npq\,.$$

（独立性により, $E\{(X_1-p)(X_2-p)\}=E\{(X_1-p)\}E\{(X_2-p)\}=0$ などとなる.この性質を, **｢積の期待値は期待値の積である｣** という.）

以上とはまったく異なるアプローチを用い,同じ結果を導く.これが(3.31)式に基づく導出となる.確率関数は(3.31)であるから,期待値の公式により, $E(X)=\sum_{x=1}^{n}x\,{}_nC_x\,p^x q^{n-x}$ となる.(シグマにおいて､x=0 の項は 0 になる.)　この式を整理すると,

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n}x\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(n-x)!(x-1)!}p^x q^{n-x}$$ （分母分子の x は共通）

$$=np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}$$ （シグマの上限と下限から１を引いて）

$$=np\sum_{x-1=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}$$ ((n-1)をｍに,(x-1)をｙに変換する.)

$$=np\sum_{y=0}^{m}\frac{m!}{(m-y)!y!}p^{y}q^{m-y}=np.$$ (B(m,p)の確率関数の総和は１)

次に分散を求めてみる. $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ であるから, $E(X^2)$ をまず計算し, 平均の２乗を引いて分散を求めればよい.しかし,二項確率関数においては、$E\{X(X-1)\}=E(X^2)-E(X)$ を最初に計算し,この結果から $E(X^2)$ を求める方が簡潔である.つまり、

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\{E(X^2)-E(X)\}+E(X)-E(X)^2$$

$$=E\{X(X-1)\}+E(X)-E(X)^2.$$

$E\{X(X-1)\}$ を計算する。

$$E\{X(X-1)\}=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^{x}q^{n-x}=\sum_{x=2}^{n}\frac{n!}{(n-x)!(x-2)!}p^{x}q^{n-x}$$

(シグマ計算において、x=0 と x=1 の項は 0 になる.)

$$=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!}p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{x-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!}p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)}$$ (シグマの上下限から 2 を引く)

$$=n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{m}\frac{m!}{(m-y)!y!}p^{y}q^{m-y}=n(n-1)p^2.$$ ((n-2)をｍに,(x-2)をｙに変換する.)

だから, $V(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=npq.$

Poisson 確率変数の平均値と分散の導出(3.34)

$\exp(\lambda)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}$ に等しい.右辺は左辺のテイラー展開であるが,単純に両者は同じであると理解しても良い.この関係により, $\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}\exp(-\lambda)=1$ となる.

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} xp(x)=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x\exp(-\lambda)}{x!}=\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}\exp(-\lambda)}{(x-1)!}=\lambda\sum_{z=0}^{\infty}\frac{\lambda^z\exp(-\lambda)}{z!}=\lambda.$$

$V(X)$を導出するにあたり,準備として$E\{X(X-1)\}$を求めておこう.

$$E\{X(X-1)\}=\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\ p(x)=\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x\exp(-\lambda)}{x!}=\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}\exp(-\lambda)}{(x-2)!}$$

$=\lambda^2\sum_{z=0}^{\infty}\frac{\lambda^z\exp(-\lambda)}{z!}=\lambda^2$. ここで $E\{X(X-1)\}=E(X^2-X)=E(X^2)-\lambda=\lambda^2$ だから,$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$,さらに$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$,$E(X)=\lambda$だから,$V(X)=\lambda$.

(S)小数の法則: 二項確率関数から,Poisson 確率変数の導出 (抄)

ポアソン確率変数の性質により,全時間 s を n 分割し,細分された時間を(s/n)とする. その細分時間内に事象が起きる確率は$p=\frac{\lambda s}{n}$となる.細分時間内に起きる事象の回数は高々1 回と考えればよい.つまりベルヌーイ実験になっている.全体として細分された時間は n 回あるから,これは実験回数が n,成功確率が p の二項実験である.n 回の実験の内,k 回成功する確率関数は

$p(X=k)={}_nC_k(\frac{\lambda s}{n})^k(1-\frac{\lambda s}{n})^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n,$ となる. 以下,n に関して極限を求め,二項確率関数を近似する.確率関数を書き直すと

$p(X=k)=\frac{(\lambda s)^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}(1-\frac{\lambda s}{n})^{n-k}$ となる.ここで中央の分数は,k が有限の定数であるから,分母分子とも k 個の n が含まれ,1 で近似できる.最終項においても k は有限の定数だから,$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda s}{n})^n=\exp(-\lambda s)$となる. 全時間 s を 1 単位とみなせば,$p(X=k)=\frac{(\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,\ 1,\cdots,\infty$

一様確率変数の平均値と分散の導出

$[a,\ b]$で一定の正値,$(-\infty,\ a)$及び$(b,\ \infty)$では 0 の値をとる密度関数をもつ一様分

布の平均値と分散を導出しよう.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}[\frac{1}{2}x^2]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}[\frac{1}{3}x^3]^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

練習問題(3章)

1. Z=2 (1,1), $P_z(2)=\frac{1}{36}$. Z=3 (1,2), $P_z(3)=\frac{1}{18}$. Z=4 (2,2) (1,3), $P_z(4)=\frac{1}{12}$.

Z=5 (2,3), (1,4), $P_z(5)=\frac{1}{9}$. Z=6 (1,5) (2,4) (3,3), $P_z(6)=\frac{5}{36}$.

Z=7 (1,6) (2,5) (3,4), $P_z(7)=\frac{1}{6}$. Z=8 (2,6) (3,5) (4,4), $P_z(8)=\frac{5}{36}$.

Z=9 (3,6) (4,5), $P_z(9)=\frac{1}{9}$. Z=10 (4,6) (5,5), $P_z(10)=\frac{1}{12}$. Z=11 (6,5), $P_z(11)=\frac{1}{18}$.

Z=12 (6,6), $P_z(12)=\frac{1}{36}$.

$F_z(2)=\frac{1}{36}$, $F_z(3)=\frac{1}{12}$, $F_z(4)=\frac{1}{6}$, $F_z(5)=\frac{5}{18}$, $F_z(6)=\frac{5}{12}$, $F_z(7)=\frac{7}{12}$, $F_z(8)=\frac{13}{18}$,

$F_z(9)=\frac{5}{6}$, $F_z(10)=\frac{11}{12}$, $F_z(11)=\frac{35}{36}$, $F_z(12)=1$.

$P(5\le Z\le 8)=F_z(8)-F_z(5)+P_z(5)=F_z(8)-F_z(4)=\frac{13}{18}-\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$

2. $F(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt+\int_2^{\infty} f(t)dt=\int_0^2 cdt=2c$.

F(∞)＝1 だから, 2c=1 が成立し, c＝1/2.

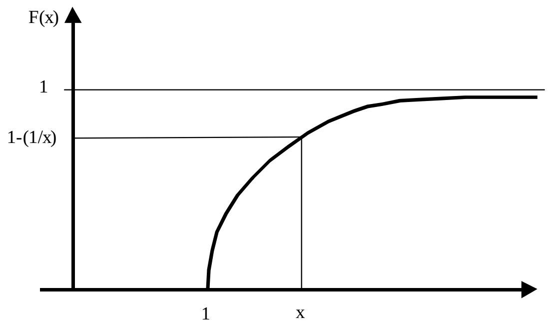
（積分計算をしなくても,長方形の面積は求まる.）

平均 $\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(t)dx=\int_0^2 x\frac{1}{2}dx=1$. 分散 $V(x)=E(x^2)-\mu^2=\int_0^2 x^2\frac{1}{2}dx-1=\frac{1}{3}$.

3. $\mu=\sum_{i=1}^{6} xp(x)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$

$V(x)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-\frac{7}{2})^2p(x)=\sum_{i=1}^{6}(x_i{}^2-\frac{49}{4})\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i{}^2-(\frac{49}{4})=\frac{1}{6}\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$

4. $P(1\le x\le 4)=P(0\le\frac{x-1}{\sqrt{3}}\le\sqrt{3})=0.458$（表より）



95%点　$P(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\le 1.65)=0.95$ を満たす x は 3.855.

5. $F(x)=0,(x\le 1)$.　$F(x)=1-\frac{1}{x},(1<x)$.

a) $0\le F(x)\le 1, F(\infty)=1, x\le y$ なら $F(x)\le F(y)$ だから条件を満たす

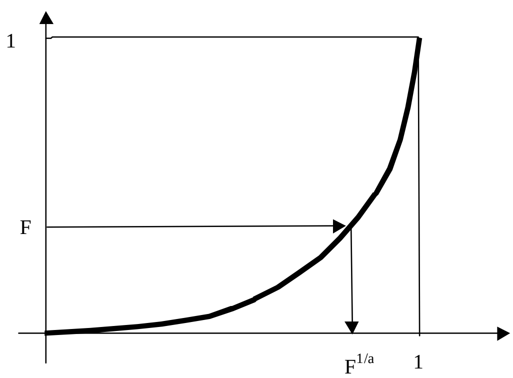
b) x が 1 以下の時は 0.　$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{x^2}(x\ge 1),$

c) $F(3)-F(2)=(1-\frac{1}{3})-(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$

d) $E(x)=\int_1^\infty xf(x)dx=\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=[\log|x|+c]_1^\infty=\infty$（発散する）

e) $1-\frac{1}{x}=0.75,0.25$ を解いて，　$x=4,\frac{4}{3}$

6. 例えば, $x^3=0.75$ を満たす x を求めると, $0.75^{1/3}$.　α については, $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{100}}$,となる.



7.　$p(x)={}_4C_x(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{4-x}$．　自明だが,数値も求めること.

8.　a)1 分に 0.1 台なら 1 時間に 6 台．　だから Poisson パラメーターを 6 として計算する.Poisson パラメーターを 6 とすると確率関数は $p(x)=\frac{6^x\exp(-6)}{x!}$．

$P(x\geq 6)=1-P(x\leq 5)=1-(0.002+0.015+0.045+0.089+0.134+0.161)=0.554$

b)1 分に 0.1 台のなら 10 分で 1 台．　Poisson パラメーターは 1 である.先の問いと同様に $P(x\geq 1)=1-p(0)=0.632$.

c)上の 2 問は,平均すれば同じ事象の確率を問うているが,Poisson パラメーターの取り方により,違った結果をもたらす．a)は 1 時間を基準とする．　b)は 10 分を基準とする.

9.　E(X)=0×0.135+1×0.271+2×0.271+3×0.180+4×0.090+5×0.036+6×0.012+7×0.003+8×0.001=1.994.　2 にならない.分散も同様にして計算すると 1.981964.

10.　$E(x)=0, V(x)=1, E(y)=0, V(y)=2.5, Cov(x,y)=0, \rho(x,y)=0$.
$p(x,y)\neq p(x)p(y)$ だから,独立でない.

11.　平均株価=1 万円,期待収益＝0,　リスク＝$\frac{1}{2}$　（一円当たり収益の分散）

12.　b の平均株価=$\frac{3}{2}$万円,b の期待収益＝$\frac{1}{2}$，リスク＝$\frac{75}{24}=\frac{25}{8}$．　ポートフォーリオでは(3.70)，(3.71)より，　期待収益＝$\frac{1}{4}$万円，期待収益率＝$\frac{1}{4}$，リスク＝$\frac{3}{4}$.

13.　2 期保有したとき:　確率$\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}$でそれぞれ 3, 0, -0.75 の収益が上がる.よって期待収益＝0，リスク＝$\frac{5}{4}$．　n 期まで持ちつづけたペイオフを x_n とする.

$E(x_n \mid x_{n-1}) = \frac{1}{3}2x_{n-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1}$,

$E(x_n{}^2 \mid x_{n-1}) = \frac{1}{3}(2x_{n-1})^2 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}x_{n-1})^2 = \frac{3}{2}x_{n-1}{}^2$.

以上より, $E(x_n) = E(E(x_n \mid x_{n-1})) = E(x_{n-1})$.

(この式は上級の内容を持つ. x_n の期待値を求めたいが直接には解けない. しかし, x_{n-1} が分かれば, 2 倍になる確率は $\frac{1}{3}$,半分になる確率は $\frac{2}{3}$ だから, x_n の期待値は x_{n-1} となる. これが x_{n-1} を条件としたときの x_n の条件付期待値であり, $E(x_n \mid x_{n-1}) = x_{n-1}$ とかく. 計算は $E(x_n \mid x_{n-1}) = \frac{1}{3}2x_{n-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1}$ である. ところで今求めたいのは x_n の期待値 $E(x_n)$ だから, この条件付期待値が分かれば次に条件 x_{n-1} についてさらに期待値を計算しないといけない. つまり, $E(x_n) = E(E(x_n \mid x_{n-1})) = E(x_{n-1})$ となる. まず条件を与えて期待値を計算し, 次に条件について期待値をもとめるのである.) 同様にして, $E(x_n{}^2) = E(E(x_n{}^2 \mid x_{n-1})) = \frac{3}{2}E(x_{n-1}{}^2)$ となる. 他方, $E(x_1) = 1,\ E(x_1{}^2) = \frac{3}{2}$ だから, 帰納的に, $E(x_n) = 1$ 万円, $E(x_n{}^2) = (\frac{3}{2})^n$ となる. したがって, $V(x_n) = E(x_n{}^2) - E(x_n)^2 = \{(\frac{3}{2})^n - 1\}$ 万円 ^{2} と求まる. 万円 ^{2} を除けばリスクになる. 期待収益は 0. 収益のリスクはペイオフのリスクと変わらない.

別解: 二項ツリーを考えると分かるように, n 期において可能な場合の数は同じ結果も含めて 2^n ある. n 回の中で i 回 2 倍になり (n-i) 回半分になる確率は $\binom{n}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}$ である. 他方 n 回の中で i 回 2 倍になり (n-i) 回半分になる場合の

株価は $2^i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}a$ である. これを a で割れば収益になる. その期待値を求めるには,

確率と株価を掛けて, 全ての場合について和を求めればよい. 従って, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}(2)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-i}=(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^{n}=1$, が収益の期待値となる.

分散を求めるために,収益の２乗の期待値を求めると,

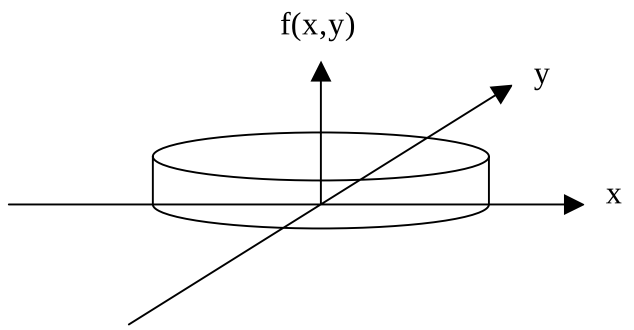
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}(4)^{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{4}{3}\right)^{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-i}=(\frac{4}{3}+\frac{1}{6})^{n}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}.$$

したがって, 分散は $=\{(\frac{3}{2})^{n}-1\}$.

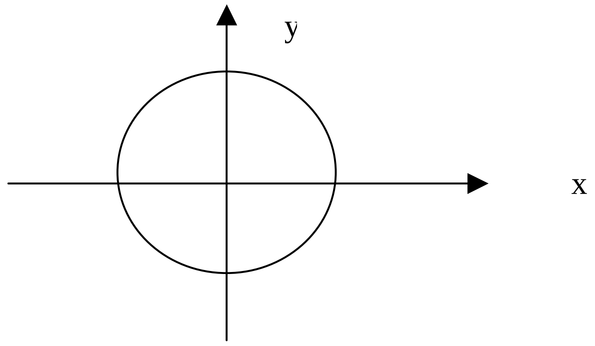
補論　　　　　　（上級の統計学の内容を持ちます）1997 年 5 月 29 日

連続形同時密度関数,周辺密度,条件付き密度関数

連続型同時密度関数を, $f(x,y)=\frac{1}{\pi}$,ただし $x^2+y^2\leq 1$ とする.



x と y の領域は図示すれば下の図になり, 半径は１の円である. 面積は π だから, 密度は $\frac{1}{\pi}$, そして体積は１となっている.



共分散の計算:共分散を計算すると

$$E(X,Y)=\iint\ x\,y\frac{1}{\pi}dx\,dy$$

と掛ける.積分範囲は　$x^2+y^2\le 1$.積分範囲は｛$x^2+y^2\le 1$,かつ x が正｝と,｛$x^2+y^2\le 1$かつ x が負｝に分割でき,積 x y は符号が逆になるから,

$$E(X,\ Y)=0\ .$$

したがって X と Y の共分散は 0,あるいは$COV(X,Y)=0$となる.（x と y の期待値はそれぞれ０である.この計算はできるだろうか.厳密には,各々の周辺密度を計算してから求めた方がよい.）**共分散は 0 であるが, X と Y は独立ではない.**

積分計算を詳しく説明する.２重積分であるので x を与えると y の積分範囲は$(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$になる.x は-1 から 1 までである.だから積の期待値は

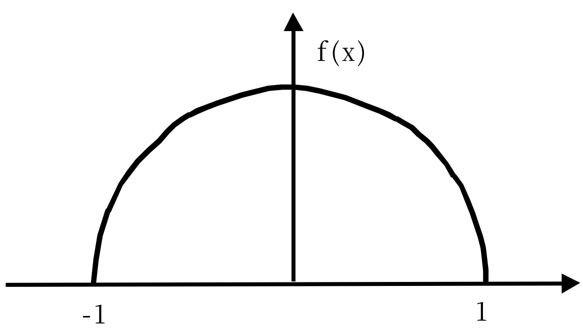
$$\iint x\,y\frac{1}{\pi}dx\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ ydx\,dy$$

となる.次に x の積分範囲を（-1,0）と（0,1）に分ければ,0 が分かる.

周辺密度:　X 周辺密度を計算してみる.これは同時密度関数を縦方向に足し合わせるという事である.x を所与とすれば,y の積分範囲は$(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$　だから,この範囲について y に関する積分を求めると

$$f_x(x)=\int\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

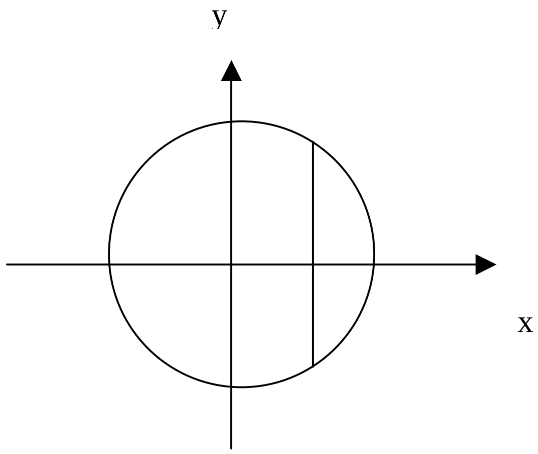
となる.周辺の図はこんな感じ（下図）.平方根の部分は円だが,密度関数である



から正の方の半円を使う．ところが半円の面積は$\frac{\pi}{2}$だから，面積が１になるよう$\frac{2}{\pi}$をかけて調整していると考えればよい．

面積の計算は　$\int_{-1}^{1} f_x(x)\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

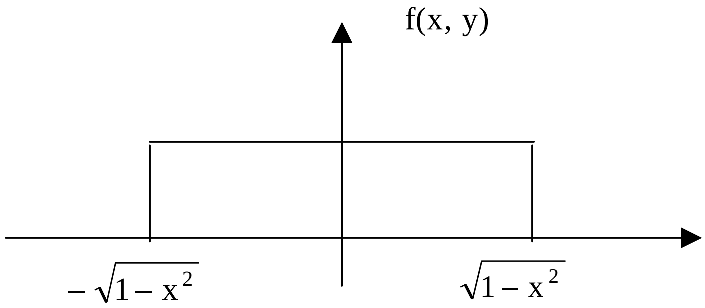
により求まる．あるいは半円との関係によりあきらかといえる．（計算がしたければ，$x=\cos\theta$　と変換してθの範囲を$(0,\Pi/2)$と変換して計算する．変換のヤコビは$\sin\theta$となる．以下，三角関数の積分．）またこの周辺密度関数から，xの期待値は０になることが理解できよう．（左右対称である．）以上の周辺密度関数の計算より明らかなように　$f_{xy}(x\ y)=\frac{1}{\pi}\neq f_x(x)f_y(y)$，　なので Ｘ と Ｙ は独立に分布していない!!!．



条件付き密度：　最後に条件付き分布を考える．Ｘ を ｘ とした時の Ｙ の条件付き密度を導出する．

Ｘをｘに固定すると Ｙの範囲は$(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$となる．上図の切断面は長方形で

となっており高さは$\dfrac{1}{\pi}$である．したがって長方形の面積は１にはならない．



（面積$=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$）．面積を１にするには，

$$\frac{1}{\pi}\div\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

と調整する．これが条件付き密度となる．条件付き密度は長方形であることだけは確かである．ただし y の範囲は$(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$．もちろんこの結果は

$$f(Y\,|\,X)=\frac{\text{joint density}}{\text{marginal density of x}}$$

と一致する．したがって$x=0\rightarrow f(Y\,|\,X)=\dfrac{1}{2}\qquad(-1<y<1)$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow f(Y\,|\,X)=1\qquad(-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2})$$

$$x=\frac{1}{2}\rightarrow f(Y\,|\,X)=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad(\frac{-\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2})$$

などとなる．条件により条件密度の高さは変化する．条件付き密度に関する期待値（条件付き期待値）も条件に依存している．ただし分布の形からしても

$$E(Y\,|\,X)=0\ .$$

（条件付き期待値とは,条件付き密度に関して期待値計算をして求める．）さらに条件付き分散は

$$E(Y^2 \mid X) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{3}\ 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}(1-x^2)\ .$$

となり，当然ではあるが，条件変数の値に依存している．（条件により長方形の底辺が変化し，散らばりの範囲が変わる．）

追加練習問題　　　　　　　　　　　　　　1997 年 6 月 5 日

A]　次の様な同時（あるいは結合）確率関数を基にして以下の計算をしなさい．

Y＼X	0	1	2
0	0.05	0.1	0.03
1	0.21	0.11	0.19
2	0.08	0.15	0.08

1）　次の確率を計算しなさい．

(a) $P(Y < z)$,　(b) $P(Y < z, X > 0)$,　(c) $P(Y = 1, X \geq 1)$

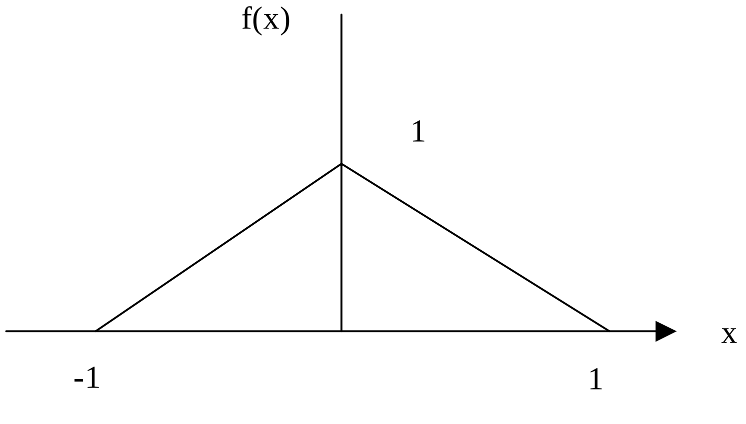
2）　X と Y の周辺確率関数を求めなさい．

3）　E(X)，E(Y)，V(X)，Cov(X,Y)，$E(X^2\ Y^3)$ を求めなさい．

4）　E(Y|X) と V(Y|X) を求めなさい．

5）　$E(Y - E(Y \mid X))^2$ を求めなさい．

B]　次の様な密度関数をもつ確率変数の平均と分散を求めなさい．



C] X の密度関数が $f(x)=0\ \ (x\le 0)$, $f(x)=\exp(-x)\ \ (0<x)$ と定義されている.

1) X の分布関数を求めなさい.

2) X の期待値と分散を求めなさい.

（部分積分の計算ができなければしなくてよい.）

3) もし X の密度関数 が, $f(x)=\dfrac{1}{2}\exp(-|x|)$,

と定義されているとすると,X の分布関数,期待値,分散はどうなるだろうか.