最尤推定量と，モーメント法推定量の比較

例 5.9 より，モーメント推定量は

$$a = 2\overline{X}$$

であり，例 5.11 より，最尤推定量は

$$b = \max(X)$$

となる．ここでは，この二つの推定量の分散を比較してみよう．

0.0.1　a の分散

まず，期待値は，

$$E(a) = 1$$

となることは，容易に確かめられる．分散は，標本平均の分散より，

$$\begin{aligned} V(a) &= 4V(\overline{X}) \\ &= 4\frac{1}{12n} \\ &= \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

となる．

0.0.2　b の分散

一様確率変数の最大値の分布関数を求める．最大値の分布関数は，(4.38) 式により

$$F(x)^n$$

となるが，一様分布では

$$F(x) = x$$

だから，b の分布関数は

$$x^n$$

である．したがって，密度関数は

$$nx^{n-1}$$

となる．この密度関数により，の期待値を求めると，

$$\begin{aligned} E(b) &= \int_0^1 xnx^{n-1}dx \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

となり，バイアスがある．分散は

$$\begin{aligned} E(b^2) &= \int_0^1 nx^{n+1}dx \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)^2 - (n+2)n^2}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{5n+4n^2+n^3+2} \\ &= \frac{1}{5+4n+n^2+(2/n)} \end{aligned}$$

となる．分散はかなり小さくなる．しかし，バイアスがある．

0.0.3 修正推定量

ここで，最尤推定量を修正し

$$c = b + \frac{1}{n+1}$$

としよう．この推定量は不偏になる．また，b との違いは定数であるので，

$$V(c) = V(b)$$

となることが分かる．