統計学　ベイズの定理と 3 囚人問題

2009 年 4 月 20 日

3 囚人問題（中公新書，市川伸一著考えることの科学）

3 人の死刑囚 A，B，C がいる。一人が恩赦されることとなった。囚人達は誰が恩赦になるか知らない。それを知っているのは看守だけ。囚人 A は看守に,「B か C のどちらかは死刑になるのだから，処刑される人を B か C の一人教えてくれ」と聞いた。二人が処刑と聞けば A の処刑はなくなる。一人ならば，A の処刑の有無の情報は与えないからよいだろうと考えた看守は,「囚人 B は処刑される」と答えた。(B と C が処刑と答えると，A の処刑は無くなる。B が処刑，C は恩赦と答えると，A の処刑が決まる。B が恩赦，C が処刑でも同じ。）これを聞いた A は，答えを聞く前の自分が恩赦される確率は 1/3 だったが，答えを聞いた後の恩赦の確率は 1/2 になったと考えた。これは正しいか。

答えは間違い

理由は，恩赦は一人だから，二人は処刑されることが分かっている。したがって,「B か C のどちらか」は処刑されることも事前に分かっている。だから看守に「処刑される人を B か C の一人」教えて貰っても，情報は増加しない。死刑の確率は 1/3 で，喜んでも仕方がない。

市川の答え

$$P(A\,\text{恩赦}) = P(B\,\text{恩赦}) = P(C\,\text{恩赦}) = \frac{1}{3} \tag{1}$$

以上は条件。さらに以下の確率が求まる。

$$P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|A\,\text{恩赦}) = \frac{1}{2} \tag{2}$$

なぜなら，この場合 B と C の両方が死刑だから,「B が死刑」というか「C が死刑」というかのどちらか。式では,

$$\begin{aligned}
&P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|A\,\text{恩赦})\\
&= P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|B\,\text{と}\,C\,\text{死刑})\,P(B\,\text{と}\,C\,\text{死刑}\,|A\,\text{恩赦})\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となる。次に,

$$P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|B\,\text{恩赦}) = 0 \tag{3}$$

なぜなら，嘘はつかないという原則の下，B が死刑とは言わない。さらに,

$$P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|C\,\text{恩赦}) = 1 \tag{4}$$

なぜなら C が恩赦だから A と B が死刑。この場合，A が死刑とは言えないから，間違いなく B は死刑という。

以上の確率を用い，ベイズの定理により

$$P(A\,\text{恩赦}\mid\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}) \tag{5}$$

を求める。すると,「という」は省略するが

$$\frac{P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{恩赦})\frac{1}{3}}{P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{恩赦})\frac{1}{3} + P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|B\,\text{恩赦})\frac{1}{3} + P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|C\,\text{恩赦})\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

となり A の恩赦確率は変化しない。

森棟のコメント

第 1 のコメント

確率空間を

$$S = A\,\text{恩赦} \cup B\,\text{恩赦} \cup C\,\text{恩赦} \tag{6}$$

と分割している。本来は

$$S = A\,\text{恩赦} \cup A\,\text{非恩赦} = A\,\text{恩赦} \cup A\,\text{死刑} \tag{7}$$

となるべき。この方向で考えると

$$P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{死刑}) = \frac{1}{2}$$

だから

$$\begin{aligned} &\frac{P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{恩赦})\frac{1}{3}}{P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{恩赦})\frac{1}{3} + P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|A\,\text{死刑})\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{8}$$

答えは同じ。分母の $P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|A\,\text{死刑})$ の計算は,

$$\begin{aligned} &P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑という}\,|A\,\text{死刑}) \\ &= P((\text{看守が}\,B\,\text{死刑という} \cap B\,\text{恩赦}) \cup (\text{看守が}\,B\,\text{死刑という} \cap C\,\text{恩赦})|A\,\text{死刑}) \\ &= P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|B\,\text{恩赦})\,P(B\,\text{恩赦}\,|A\,\text{死刑}) + P(\text{看守が}\,B\,\text{死刑}\,|C\,\text{恩赦})\,P(C\,\text{恩赦}\,|A\,\text{死刑}) \\ &= 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。あたり前かもしれないが。

第 2 のコメント

看守に「B は死刑か」と聞くとする。答えが「死刑」ならば，A が恩赦になる確率は 1/2 となり直感に合う.NO と答えると，A は死刑になるので，情報が増えている。看守に「B は死刑か」と聞くことはありえない。

3 囚人問題の変形 (市川)

事前確率が罪の重さにより

$$P(A\,\text{恩赦}) = \frac{1}{4}, P(B\,\text{恩赦}) = \frac{1}{4}, P(C\,\text{恩赦}) = \frac{1}{2} \tag{9}$$

と調整されているとする。「囚人 B は処刑される」と答えた場合，同じ確率を求めると，

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

となり，A 恩赦 の事前確率より小さくなってしまう。理由は，B が処刑と決まれば，残るのは A と C で，相対的な事前確率はしかし，看守が「囚人 C は処刑される」と答えた場合には，

$$\frac{P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑という}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}}{P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}+P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |B\ \text{恩赦})\frac{1}{4}+P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |C\ \text{恩赦})\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

となり事前確率より大きくなる。

森棟解釈

$$P(A\ \text{恩赦}\mid\text{看守が}\ B\ \text{死刑という})=\frac{P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑という}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}}{P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}+P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\ |A\ \text{死刑})\frac{3}{4}} \tag{10}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{5}$$

で同じ。分母の $P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑という}\ |A\ \text{死刑})$ の計算は，

$$\begin{aligned}
&P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑という}\ |A\ \text{死刑})\\
&=P((\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\cap B\ \text{恩赦})\cup(\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\cap C\ \text{恩赦})|A\ \text{死刑})\\
&=P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\ |B\ \text{恩赦})\ P(B\ \text{恩赦}\ |A\ \text{死刑})+P(\text{看守が}\ B\ \text{死刑}\ |C\ \text{恩赦})\ P(C\ \text{恩赦}\ |A\ \text{死刑})\\
&=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=P(C\ \text{恩赦}\ |A\ \text{死刑})
\end{aligned}$$

となる。

看守が「C 死刑」というなら

$$P(A\ \text{恩赦}\mid\text{看守が}\ C\ \text{死刑という})=\frac{P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑という}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}}{P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |A\ \text{恩赦})\frac{1}{4}+P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |A\ \text{死刑})\frac{3}{4}} \tag{11}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

で同じ。分母の $P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑という}\ |A\ \text{死刑})$ の計算は，

$$\begin{aligned}
&P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑という}\ |A\ \text{死刑})\\
&=P((\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\cap B\ \text{恩赦})\cup(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\cap C\ \text{恩赦})|A\ \text{死刑})\\
&=P(\text{看守が}\ C\ \text{死刑}\ |B\ \text{恩赦})\ P(B\ \text{恩赦}\ |A\ \text{死刑})\\
&=P(B\ \text{恩赦}\ |A\ \text{死刑})\\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

この展開から理解できるように，$P(C\text{恩赦}|A\text{死刑})$ と $P(B\text{恩赦}|A\text{死刑})$ によって最終確率が決まっている。$P(B\text{恩赦}) = 3/8$ なら

$$\begin{aligned}
&\frac{P(\text{看守が}C\text{死刑という}|A\text{恩赦})\frac{1}{4}}{P(\text{看守が}C\text{死刑}|A\text{恩赦})\frac{1}{4} + P(\text{看守が}C\text{死刑}|A\text{死刑})\frac{3}{4}} && (12)\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + P(B\text{恩赦}|A\text{死刑})\times\frac{3}{4}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{3/8}{3/4}\times\frac{3}{4}} && (13)\\
&= \frac{1}{4} && (14)
\end{aligned}$$

で事前確率と同じになる。