

基礎コース 計量経済学 解答

July 18, 2008

まだ、6章の解答ならびに説明はできていません。
解答の誤りなどは、morimune@econ.kyoto-u.ac.jp
に連絡下さい。22/9/2005
一部改訂(7章の中心極限定理) 20/5/2006
一部修正 18/7/2008

1 データの性質

1.1

(a)

$$c + c + \cdots + c = nc$$

(b)

$$\begin{aligned}(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\bar{x} \\ &= n\bar{x} - n\bar{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c(x_1 - \bar{x}) + c(x_2 - \bar{x}) + \cdots + c(x_n - \bar{x}) &= c \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - (y_1 \bar{x} + y_2 \bar{x} + \cdots + y_n \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{x}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{x}(n\bar{y})\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{y}(n\bar{x})\end{aligned}$$

となる。さらに

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}$$

となり, 同値。両辺を n で割ると, 標本共分散

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{y}\bar{x}$$

になるが, 右辺は, 「積の平均」から「平均の積」を引いた形になっている。

1.2

(a) 平均は5であるから, x の標本分散

$$= \frac{1}{3}(1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 - 4 \times 2.5 \times 2.5) = \frac{5}{3},$$

$$x \text{ の標本標準偏差} = \sqrt{\frac{5}{3}},$$

y についても, 順番が逆なだけだから, 標本分散と標準偏差は同じ。標本共分散

$$= \frac{1}{3}(1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 - 4 \times 2.5 \times 2.5) = -\frac{5}{3},$$

$$\text{標本相関係数} = -\frac{5}{3} / (\sqrt{\frac{5}{3}} \times \sqrt{\frac{5}{3}}) = -1.$$

(b) 標本分散と, 標準偏差は (a) と変わらない。標本共分散は

$$= \frac{1}{3}(1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 - 4 \times 2.5 \times 2.5) = \frac{5}{3},$$

となる。したがって, 標本相関係数は 1。

(c) 問題に間違いあり．このまま問題を解くと， x の標本分散は変わらない．
 y の場合は，

$$= \frac{1}{3}(1 \times 1 + 2 \times 2 + (-3) \times (-3) + (-4) \times (-4) - 4 \times (-1) \times (-1)) = \frac{26}{3},$$

となる．標本共分散は

$$= \frac{1}{3}(1 \times (-4) + 2 \times (-3) + 3 \times 2 + 4 \times 1 - 4 \times (-1) \times 2.5) = \frac{10}{3}$$

$$\text{標本相関係数} = \frac{10/3}{(\sqrt{26/3} \times \sqrt{5/3})} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

しかし，本来の問題は，

$$y = (-4, -3, -3, -4)$$

で，平均は-3.5．標本共分散は

$$= \frac{1}{3}(1 \times (-4) + 2 \times (-3) + 3 \times (-3) + 4 \times (-4) - 4 \times (-3.5) \times 2.5) = 0$$

で，標本相関係数も 0．

1.3

y 軸対称: (1,2),(2,4),(-1,2),(-2,4)

x 軸対称: (1,2),(2,4),(1,-2),(2,-4)

原点对称: (1,2),(2,4),(-1,-2),(-2,-4), この場合は，共分散は 0 にならない．

1.4

表 1.5 より，

$$t = \sqrt{20} \frac{-55.18}{\sqrt{12685.36}} = \sqrt{5} \frac{-110.36}{113}$$

となり，この値はほぼ $-\sqrt{5}$ である．(t の正確な値は-2.191 である．) 対立仮説で，平均収益は負とするなら，自由度が 19 の t 分布表より，5% 境界点は，-1.73 としてよい．従って，平均収益は 0 であるという帰無仮説は，棄却される．標準正規分布を帰無分布とするなら，境界点は-1.65 となるだけだから，検定結果は変わらない．

同じく，

$$t = \sqrt{17} \frac{33.71}{\sqrt{18249.79}} = \sqrt{17} \frac{33.71}{135} \doteq \frac{\sqrt{17}}{4} \doteq 1$$

となる．(t の正確な値は 1.0289)．対立仮説で平均収益は正とするから，境界点は，自由度が 16 の t 分布を使えば，1.75，標準正規分布を使えば 1.65 であるから，帰無仮説を棄却することはできない．

1.5

$$t = \sqrt{17-2} \frac{-0.1}{\sqrt{1-(-0.1)^2}} \doteq \sqrt{16} \times (-0.1) \doteq -0.4$$

となるから，自由度が 15 の t 分布表，あるいは標準正規分布表のいずれを用いても，相関は無い，という帰無仮説は棄却できない (t の正確な値は 0.389)

2 単回帰

2.1

y	x	x^2	xy	y^2	回帰値	残差
1	1	1	1	1	$-3 + \frac{9}{2} \times 1 = 1.5$	$1 - 1.5 = -0.5$
7	2	4	14	49	$-3 + \frac{9}{2} \times 2 = 6$	$7 - 6 = 1$
10	3	9	30	100	$-3 + \frac{9}{2} \times 3 = 10.5$	$10 - 10.5 = -0.5$
18	6	14	45	150	18	0

勾配は

$$b = \frac{45 - 6 \times 18/3}{14 - (6 \times 6/3)} = \frac{9}{2}$$

$$a = (18/3) - \frac{9}{2} \times (6/3) = -3$$

回帰値の和は，被説明変数の和と一致する．残差の和は0．

2.2

y	x	x^2	xy	y^2
-5	-1	1	5	25
1	0	0	0	1
4	1	1	4	16
0	0	2	9	42

$$b = \frac{9 - 0}{2 - 0} = \frac{9}{2},$$

$$a = 0 - \frac{9}{2} \times 0 = 0.$$

となる．

2.3

勾配係数は

$$b = \frac{\sum_{t=1980}^{2002} (t - \bar{t}) y_t}{\sum_{t=1980}^{2002} (t - \bar{t})^2}$$

となる．ただし， \bar{t} は t の平均． $t^* = t - 1979$ ，だからその平均は，

$$\bar{t}^* = \bar{t} - 1979$$

また，

$$t^* - \bar{t}^* = (t - 1979) - (\bar{t} - 1979) = t - \bar{t}$$

この回帰式の勾配の推定量は

$$b^* = \frac{\sum_{t=1980}^{2002} (t^* - \bar{t}^*) y_t}{\sum_{t=1980}^{2002} (t^* - \bar{t}^*)^2} = \frac{\sum_{t=1980}^{2002} (t - \bar{t}) y_t}{\sum_{t=1980}^{2002} (t - \bar{t})^2}$$

となり、 b に一致する。

2.4

元の回帰式に関しては、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2},$$

逆回帰式については、変数の記号が異なっているだけだから、

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2},$$

となる。また標本相関係数は、

$$r = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}}$$

であるから、

$$r^2 = \hat{\beta} \times \hat{\gamma}$$

という関係が成立する。例 2.9 では、

$$r^2 = 0.567 \times 1.231 = 0.698.$$

2.5

被説明変数が 10 倍、説明変数が 100 倍になると、もとの推定量を

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}$$

ならびに

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

とすれば、星付き変数ならびに係数を新たに定義された変数、新たに定義された変数に関する回帰式の係数推定量として、

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t^* - \bar{x}^*)(y_t^* - \bar{y}^*)}{\sum_{t=1}^n (x_t^* - \bar{x}^*)^2} = \frac{\sum_{t=1}^n 100(x_t - \bar{x})10(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (100(x_t - \bar{x}))^2} = \frac{1}{10} \hat{\beta}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^* &= \bar{y}^* - \hat{\beta}^* \bar{x}^* \\
&= 10\bar{y} - \frac{1}{10} \hat{\beta} \times 100\bar{x} \\
&= 10\hat{\alpha}
\end{aligned}$$

となる。この関係は、

$$\hat{y}_i = 1 + 2x_i$$

より、両辺を10倍するなら、

$$10\hat{y}_i = 10 + 20x_i$$

さらに、x変数を100倍するなら、

$$\begin{aligned}
10\hat{y}_i &= 10 + 20 \frac{1}{100} (100x_i) \\
&= 10 + 0.2 \times (100x_i)
\end{aligned}$$

という風に、元の関係を維持する操作によって、求める事ができる。

2.6

定数項しか含まない回帰式だから、

$$y_i = \mu + u_i$$

となる。誤差項は変わらない。一次の条件は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} (y_i - \hat{\mu})^2 \\
&= \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{\mu}) \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} (y_i - \hat{\mu}) \\
&= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0 \quad (*)$$

を満たすように $\hat{\mu}$ を求める。シグマを分解すると

$$\sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\mu} = 0$$

だから,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

また, (*) 式より, 残差の和は 0 となる. 回帰値は

$$\hat{y}_i = \hat{\mu}$$

となり, 残差は $\hat{y}_i - \hat{\mu}$, したがって

$$\begin{aligned} RSS &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

しかし, これは TSS に等しい. だから, 決定係数は 0. ちなみに回帰変動は

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 0.$$

2.7

$$y_i = \beta x_i + u_i$$

だから, 一次の条件は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{\beta} x_i) \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} (y_i - \hat{\beta} x_i) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i) x_i \quad (*) \\ &= -2 \left\{ \sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i x_i \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

回帰値は,

$$y_i = \hat{\beta} x_i$$

だから, 残差は, $y_i - \hat{\beta} x_i$, また一次の条件 (*) より, 残差と x_i の積和は 0 になる. つまり, 直交する. しかし, 残差の和が 0 になる保証はない.

2.8

8.1 例えば,

$$\ln(439/479) = -0.0872.$$

8.2

$$R_{ntt} = 0.00201(0.11) + 0.71699(0.26)R_{nikkei}$$

したがって, 定数項は 0.002, つまり, 0.2%。高すぎるか。

8.3 左辺から 0.005 を引き, それを被回帰変数とする。例えば, 最初の値を

$$-0.0872 - 0.005 = -0.0922$$

として, 推定し直す。結果は

$$(R_{ntt} - 0.005) = 0.0006(0.034) + 0.71699(0.26)(R_{nikkei} - 0.005).$$

切片の t 値は有意ではない。P 値は 0.97。勾配の推定値, t 値は変わらない。P 値は 0.047。

3 偏回帰係数と回帰

3.1

$\sum_{t=1}^n x_t = 0, \sum_{t=1}^n z_t = 0$, したがって, $\bar{x} = 0, \bar{z} = 0$. さらに, $\sum_{t=1}^n z_t x_t = 0$, となる。これらを代入すると正規方程式は

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n y_t &= n\hat{\alpha} \\ \sum_{t=1}^n y_t x_t &= \hat{\beta} \sum_{t=1}^n x_t^2 \\ \sum_{t=1}^n y_t z_t &= \hat{\gamma} \sum_{t=1}^n z_t^2\end{aligned}$$

となるから, この 3 式に数値を代入すればよい。

$$21 = 6\hat{\alpha}$$

$$2 = 4\hat{\beta}$$

$$9 = 6\hat{\gamma}.$$

y	y^2	c	x	z	回帰値	残差	残差平方
1	1	1	-1	-1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(-1) + \frac{3}{2}(-1) = \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2	4	1	1	-1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(1) + \frac{3}{2}(-1) = \frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	9	1	0	-1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(0) + \frac{3}{2}(-1) = \frac{4}{2}$	1	1
4	16	1	-1	1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(-1) + \frac{3}{2}(1) = \frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
5	25	1	1	1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(1) + \frac{3}{2}(1) = \frac{11}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
6	36	1	0	1	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}(0) + \frac{3}{2}(1) = \frac{10}{2}$	1	1
21	91		0	0	21	0	3

したがって,

$$TSS = 91 - \frac{1}{6} \times 21 \times 21 = \frac{35}{2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{2}{35} \times 3 = \frac{29}{35}$$

y を $\frac{2}{7}$ 倍すると, 定数項が 1 になる. しかし, x 係数と y 係数は各々, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ となる. したがって, x 変数と y 変数を, 各々 $\frac{1}{7}$ 倍, $\frac{3}{7}$ 倍にすればよい.

定数項係数の推定値を 0 にするには, (3.27) 式より, 左辺も 0 になればよいから, 各 y 値から, 3.5 を引く.

3.2

x を, 1, z に回帰して求めた残差を x^* , y を, 1, z に回帰して求めた残差を y^* とすると

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*}{\sum_{t=1}^n (x_t^*)^2}$$

となる. 変数を入れ替えた式について同様の操作を施せば,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*}{\sum_{t=1}^n (y_t^*)^2}$$

となる. 両者を掛け合わせれば,

$$\hat{\beta}\hat{\theta} = \frac{(\sum_{t=1}^n y_t^* x_t^*)^2}{\sum_{t=1}^n (x_t^*)^2 \sum_{t=1}^n (y_t^*)^2}$$

となり, これは偏相関係数の平方である.

$$\sqrt{1.66 \times 0.24} = 0.63$$

3.3

問題に間違いあり．残差と回帰値が逆でした．正規方程式により，残差を RES と記すと

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n RES_t &= 0 \\ \sum_{t=1}^n RES_t \times x_t &= 0 \\ \sum_{t=1}^n RES_t \times z_t &= 0\end{aligned}$$

となることを使う．

3.4

残差を RES と記すと

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n RES_i^2 &= \sum_{t=1}^n RES_i(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i - \hat{\gamma}z_i) \\ &= \sum_{t=1}^n RES_i y_i - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n RES_i - \hat{\beta} \sum_{t=1}^n RES_i x_i - \hat{\gamma} \sum_{t=1}^n RES_i z_i\end{aligned}$$

となるが，さらに正規方程式を個々の項に当てはめれば $\sum_{t=1}^n RES_i y_i$ だけが残る．

$$\sum_{t=1}^n RES_i y_i = \sum_{t=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i - \hat{\gamma}z_i) y_i$$

この積和を展開して求める．

3.5

Φ に

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} - \hat{\gamma}\bar{z}$$

を代入するだけ． Φ の中身は，回帰式

$$y_i - \bar{y} = \hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \hat{\gamma}(z_i - \bar{z}) + error$$

の最小 2 乗推定に対応している．ここで， $(x_i - \bar{x})$ を $(z_i - \bar{z})$ に回帰した残差変数を作る．これは人工的な回帰式

$$(x_i - \bar{x}) = \delta(z_i - \bar{z}) + error$$

を考え, δ を最小 2 乗推定して残差を求めればよい. つまり,

$$\sum_{t=1}^n \{(x_i - \bar{x}) - \delta(z_i - \bar{z})\}^2 \quad (**)$$

を, $\hat{\delta}$ に関して最小化し,

$$x_i^{**} = (x_i - \bar{x}) - \hat{\delta}(z_i - \bar{z})$$

とする. 他方, 元の回帰式における x_i^* は,

$$\sum_{t=1}^n (x_i - \hat{c} - \hat{\zeta}z_i)^2 \quad (*)$$

を最小化するように, \hat{c} と $\hat{\zeta}$ を求め, 残差を導く. ところが, $\hat{\zeta}$ を所与として, \hat{c} について最小化の条件を求めると,

$$\hat{c} = \bar{x} - \hat{\zeta}\bar{z}$$

となるから, これを (*) に代入すると (**) と同じ式になる.

4 多変数の回帰

最初に式の間違いを示します. 152 頁の (4.82) 式,

一行目右端の $\hat{\beta}_K$,
 二行目左端の $\hat{\beta}_K$,
 三行目左端の $\hat{\beta}_K$,
 は除いてください.

4.1

手計算の問題. x の和が 0 なので, 定数項は y の平均に等しい.

	y	y^2	x	x^2	xy
	0	0	-2	4	0
	3	9	-1	1	-3
	8	64	3	9	24
sum	11	73	0	14	21

後は, 公式にあわせて計算する.

$$y = 3.6(5.9) + 1.5(5.2)x, R^2 = 0.96, RSS = 1.17, ESS = 31.5$$

4.2

各変数の和が0，またxとzの積和も0になっていることに注意．このような場合は，正規方程式にデータを直接代入すると，簡単に推定結果を求めることができる．y,x,zの分散共分散行列は

	y	x	z
y	10/4	21/4	3/4
x	21/4	46/4	0
z	3/4	0	106/4

小数点表示の推定結果は，

$$\hat{y} = \frac{21}{46}(0.08446)x + \frac{3}{106}(0.05564)z.$$

残差2乗和は

$$\begin{aligned} RSS &= 10 - \frac{21}{46} * 21 - \frac{3}{106} * 3 = \frac{24380 - 21 * 21 * 53 - 9 * 23}{2438} \\ &= \frac{24380 - 23373 - 207}{2438} \\ &= \frac{800}{2438} = \frac{400}{1219} \end{aligned}$$

TSSは

$$TSS = 10$$

決定係数は，

$$1 - \frac{400}{1219} \frac{1}{10} = \frac{11790}{12190} = \frac{1179}{1219} = 0.9672$$

ただし，括弧内は標準誤差．t値は5.41，0.51となる．決定係数は，0.9672，自由度調整済み決定係数は，0.9016．係数に関するt検定では，自由度が1であるので，両側5%の境界値は12.71になり，係数は，いずれも有意にならない．

4.3

観測個数27，K=6，K-1=5，DW=1.8，だから，5%の検定ではU=1.86，L=1.0くらいになる．したがって，Uを境界値とすれば，系列相関がないという帰無仮説は棄却されるが，Lに抛れば，帰無仮説は棄却されない．数値はUに近いので，系列相関は問題にしなくてよいだろう．F検定は，

$$f = \frac{21 - 6 \cdot 0.88 - 0.660}{6 - 3} \frac{0.660}{0.660} = 1.6667$$

あるいは，

$$f = \frac{21 - 6 \cdot 0.955 - 0.94}{6 - 3} \frac{1 - 0.955}{1 - 0.955} = 1.6667$$

と計算できる．F分布表より，自由度3，14の5%点は3.34，自由度3，16の5%点は3.24だから，自由度3，15の5%点は3.20位と考えられ，3個の追加変数の係数が0であるという帰無仮説は棄却できないことがわかる．

4.4

データは章末ではなく，118 頁でした． $\log(L)$ の係数を b ， $\log(K)$ の係数を c とすれば， $b+c=1+d$ ， $b=1+d-c$ ，ですから，回帰式は

$$\log Y - \log L = a + d \log L + c\{\log K - \log L\} + e \log H4 + error$$

となります．あるいは，

$$\log(Y/L) = a + d \log L + c \log(K/L) + e \log H4 + error$$

となります．元の変数より $\log(Y/L)$ と $\log(K/L)$ を作成し，推定すると，

$$\widehat{\log(Y/L)} = 2.01 + 0.045(4.73) \log L + 0.31(7.74) \log(K/L) + 0.16(6.12) \log H4,$$

$R^2 = 0.9119$ ， $RSS = 0.05380$ ，となります．括弧の中は t 値．従って， d が 0 であるという帰無仮説は棄却されます．あるいは，収穫不変の法則は成立していません．しかし， d は正ですね．したがって，収穫逡増になり，意味はおかしくなります．

4.5

回帰式を

$$y_i = a + bx_i + error$$

として，最小 2 乗推定を行う． $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ だから，

$$\begin{aligned} & (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_1 - \bar{x})y_1 + (x_2 - \bar{x})y_2 \\ &= \frac{(x_1 - x_2)}{2}y_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{2}y_2 \\ &= \frac{(x_1 - x_2)}{2}(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

となるから，

$$\hat{b} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

となる．この勾配は，二点を通る直線の勾配に等しい．
この勾配を持つ直線の一次式は

$$y = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x$$

であるから， c は

$$y_1 = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x_1$$

あるいは

$$y_2 = c + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} x_2$$

のいずれかで定めればよい。この二式より、最小 2 乗法での公式、

$$\hat{c} = \bar{y} - \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} \bar{x}$$

が導かれる。これも正規方程式から求まる答えと一致する。

4.6

回帰値は (4.15) 式で定義される。また、正規方程式は (4.5) 式で与えられている。もし、 m 番目の説明変数が定数項ならば、

$$x_{mi} = 1$$

だから、(4.5) 式は

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Ki})\} = 0$$

となるが、これは、

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0$$

に等しい。したがって、

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$$

となり、両辺を n で割れば平均になる。注意することは、左辺は観測値の平均であり、右辺は、計算された値の平均であること。

4.7

これも、単回帰の性質の一般化。正規方程式は (4.5) 式より、

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) x_{mi} = 0$$

となる。これは残差と説明変数の直交性を示す。最小 2 乗推定量は、この条件を満たすように、定められている。

4.8

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Ki}$$

だから，正規方程式は (4.5) 式より，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \hat{y}_i &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_K \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) x_{Ki} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．だから，

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i - \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i)^2 = 0,$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i)^2.$$

両辺から， $n(\bar{y})^2$ を引くと， $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$ だから，

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

したがって，相関係数の分子は，

$$\pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}$$

となる．

4.9

最小 2 乗法の原則により

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Ki})\}^2$$

を最小にするように，推定量 $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_K$ を定めればよい．たとえば，変数 x_{1i} ， x_{2i} がダミーであり，各々 k 番目と l 番目の観測値で 1，他の観測値で 0 値をとるとする．この場合，上記の 2 乗和は，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1, i \neq m, i \neq l}^n \{y_i - (\hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Ki})\}^2 \\ &+ \{y_m - (\hat{\beta}_1 x_{1m} + \hat{\beta}_2 x_{2m} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Km})\}^2 \\ &+ \{y_l - (\hat{\beta}_1 x_{1l} + \hat{\beta}_2 x_{2l} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Kl})\}^2 \end{aligned}$$

と分解できる。しかし，第二項では， $x_{1l} = 1, x_{2m} = 0$ ，第三項では $x_{1l} = 0, x_{2m} = 1$ ，第一項では $x_{1l} = 0, x_{2m} = 0$ ，だから，2乗和は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1, i \neq m, i \neq l}^n \{y_i - (\hat{\beta}_3 x_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Ki})\}^2 \\ & + \{y_m - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 x_{3m} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Km})\}^2 \\ & + \{y_l - (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 x_{3l} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Kl})\}^2 \end{aligned}$$

となっている。明らかなように， $\hat{\beta}_3$ から $\hat{\beta}_K$ までは第一項の最小化により推定量が求まる。また，第二項より， $\hat{\beta}_1$ が求まる。同様，第三項より $\hat{\beta}_2$ が求まる。明らかだが，

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= y_m - (\hat{\beta}_3 x_{3m} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Km}) \\ \hat{\beta}_2 &= y_l - (\hat{\beta}_3 x_{3l} + \cdots + \hat{\beta}_K x_{Kl}) \end{aligned}$$

となる。

4.10

$b=c, d=1$ の検定だから，

$$b - c = e$$

$$d - 1 = f$$

とおく。あるいは，

$$b = c + e$$

$$d = 1 + f$$

と表記し， b と d を右辺に置き換え，回帰式を書き直すと

$$y_t = a + ex_t + c(x_t + z_t) + w_t + fw_t + u_t$$

となるから，を左辺に移し，

$$(y_t - w_t) = a + ex_t + c(x_t + z_t) + fw_t + u_t$$

と新しい式を作る。この式において，

$$e = 0, f = 0$$

を検定すればよい。これは，通常の F 検定である。帰無仮説の下での回帰式は

$$(y_t - w_t) = a + c(x_t + z_t) + u_t$$

である。

第二の方法として，問題文中の元の式を推定し，制約を入れて得た式，

$$(y_t - w_t) = a + c(x_t + z_t) + u_t$$

を推定し，両者の残差 2 乗和から，F 検定を行ってもよい。結果は同じである。

4.11

この問題は，多少上級．

$$V(b - c) = V(b) + V(c) - 2Cov(b, c)$$

だから， t 統計量は

$$\frac{b - c}{\sqrt{V(b) + V(c) - 2Cov(b, c)}}$$

となる．ここで分母および分子を推定値に置き換える．

$$t = \frac{0.65 - 0.44}{\sqrt{0.26^2 + 0.20^2 - 2(-0.0075)}} = 0.6$$

となるから，5% の検定では，通常に自由度では帰無仮説は棄却できない．

5 誤差項の諸問題

5.1

1.1 所得，ラグ付き所得 Y_{-1} ，流動性資産，はいずれも正の効果を持つ．利率は負の効果を示し，利率が高くなると消費が減少する結果となっている． t 値は，所得に関しては有意，ラグ付き所得は有意でない．流動性資産は有意，利率は有意でない．従って，ラグ付き所得および利率について，工夫が必要．たとえば，ラグ付き所得を除いた式を推定してみる．

限界消費性向は 0.58 だが，ラグ付き所得を含んだ長期消費性向は 0.79 で，1 より小．これは常識に合う．ラグ付き所得を除いた式を推定する場合は，限界消費性向がどうなるか，また，利率の係数がどうなるかなどに注意を払わないといけない．

1.2 $n=25$ ， $K=5$ ， $k=4$ ，だから，5% の検定では $L=1.04$ ， $U=1.77$ 位になる． DW は 1.7 だから， L によれば系列相関がないという帰無仮説は棄却できない．実際の境界値は未知だが， L を基準と考えて，系列相関は無いとする．

1.3

$$r = 1 - \frac{dw}{2} = 0.15.$$

1.4

$$0.8 = 1 - \frac{270}{TSS}$$

を解くと， $TSS=1350$ ．

1.5

$$f = \frac{25 - 5}{4} \frac{0.8}{1 - 0.8} = 20$$

となる．自由度が 4,20 の F 分布表より 1% 点は 4.43 であるから，全ての係数は 0 であるという帰無仮説は棄却される．

1.6 公式通りに計算する．

5.2

問題最後の括弧内「2.1 と結果が同じになる。ここでは最小 2 乗推定の結果も一致する」というコメントは間違っていました。

y	x	変換 $y = y^*$	変換 $x = x^*$	$y^* \times x^*$	$(x^*)^2$
2	16	$\sqrt{1 - (1/4) \times 2} = \sqrt{3}$	$\sqrt{1 - (1/4) \times 16} = 8\sqrt{3}$	24	192
4	10	$4 - 0.5 \times 2 = 3$	$10 - 0.5 \times 16 = 2$	6	4
6	4	$6 - 0.5 \times 4 = 4$	$4 - 0.5 \times 10 = -1$	-4	1
和		$7 + \sqrt{3}$	$1 + 8\sqrt{3}$	26	197

2.1 図を書いてみればわかるが、変換された二個の観測値 $(2, 3), (-1, 4)$ に関する回帰式は、勾配は、 $-1/3$ 、となる。直線は座標 $(2, 3)$ を通るから、定数項は

$$3 = a + \frac{-1}{3} \times 2$$

を満たす。したがって、 $a=11/3$ 。最小 2 乗法の公式通りに計算してもよい。

2.2

$$b = \frac{26 - (7 + \sqrt{3})(1 + 8\sqrt{3})/3}{197 - (1 + 8\sqrt{3})^2/3} = -0.13969$$

$$a = \frac{7 + \sqrt{3}}{3} + 0.13969 \times \frac{1 + 8\sqrt{3}}{3} = 3.6024$$

このような操作をしない、最小 2 乗推定の結果は

$$y = \frac{22}{3} - \frac{1}{3}x, RSS = 0$$

となる。

5.3

3.1

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(a + bx_t + u_t) \\ &= a + bx_t + E(u_t) \\ &= a + bx_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E\{(a + bx_t + u_t) - E(a + bx_t + u_t)\}^2 \\ &= E\{(a + bx_t + u_t) - (a + bx_t)\}^2 \\ &= E(u_t)^2 \\ &= V(u_t) \end{aligned}$$

だから、 t が 1, 2 なら分散は 4、 t が 3 なら分散は 1。

3.2

y	x	y/σ	x/σ	x*y*	x*2	y*2
2	14	1	7	7	49	1
4	10	2	5	10	25	4
6	4	6	4	24	16	36
sum		9	16	41	90	41

$$b = \frac{41 - 9 \times 16/3}{90 - 16 \times 16/3} = -1.5$$

$$a^* = \frac{a}{2} = 3 - (-1.5) \times 16/3 = 11$$

だから，元の定数項は 22.

3.3 変換した式は，

$$y_t^* = a^* + bx_t^* + u_t^*$$

だが，制約は，

$$a^* = b$$

である．したがって，制約の下での回帰式は

$$y_t^* = b(1 + x_t^*) + u_t^*$$

となる．この回帰式を最小 2 乗推定すればよい．

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum (1 + x_t^*) y_t^*}{\sum (1 + x_t^*)^2} \\ &= \frac{\sum y_t^* + \sum x_t^* y_t^*}{3 + 2 \sum x_t^* + \sum x_t^{*2}} \\ &= \frac{9 + 41}{3 + 2 \times 16 + 90} = 0.4 \end{aligned}$$

となる．a=0.8．

3.4 残差平方和を計算すればよい．

$$\begin{aligned} RSS_a &= \sum (y_t^*)^2 - a \sum y_t^* - b \sum x_t^* y_t^* \\ &= 41 - (11) \times 9 - (-1.5) \times 41 = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RSS_0 &= \sum (y_t^*)^2 - b \sum (1 + x_t^*) y_t^* \\ &= 41 - (0.4) \times (41 + 9) = 21 \end{aligned}$$

だから，

$$f = \frac{3 - 2 \cdot 21}{1 \cdot 3.5} = 6$$

帰無仮説の下での分布は，自由度が 1,1 の F 分布．この 5% 点は付表に無い．自由度が 1 の t 分布では，3.8 であるから，この 2 乗値は 14.44．これが境界値だから，帰無仮説は，棄却できない．

同様の検定を， t 統計量を用いて行う．

$$a^* = b + d$$

とすると，帰無仮説は $d=0$ ．回帰式は

$$y_t^* = d + b(1 + x_t^*) + u_t^*$$

だから，この式を最小 2 乗法で推定し， d に関する t 検定を行う．

6 発展した分析法

6.1

回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

だが，係数はアーモン分布ラグに従う．問題で述べられたように，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1$$

であるから，元々の 3β 係数が，2 個の γ 係数に減少している。したがって，制約は 1。だから， 3β 係数の内 1 個は，他の β 係数で表現することができる。例えば， β_2 を β_0 と β_1 で書くと，

$$\gamma_1 = \beta_1 - \beta_0$$

$$\gamma_1 = \beta_2 - \beta_1$$

だから，

$$\beta_2 - \beta_1 = \beta_1 - \beta_0$$

となり，

$$\beta_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

は明らか。P=3，q=2 だと，

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2$$

$$\beta_3 = \gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2$$

だから，やはり，制約は 1。したがって， 4β 係数の内の 1 個を，他の 3β 係数で表現することができる。例えば

$$\beta_1 - \beta_0 = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \gamma_1 + 3\gamma_2$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \gamma_1 + 5\gamma_2$$

となるから，

$$(\beta_2 - \beta_1) - (\beta_1 - \beta_0) = 2\gamma_2$$

$$(\beta_3 - \beta_2) - (\beta_2 - \beta_1) = 2\gamma_2$$

となり，

$$(\beta_3 - \beta_2) - (\beta_2 - \beta_1) = (\beta_2 - \beta_1) - (\beta_1 - \beta_0)$$

が成立する。

6.2

回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t,$$

制約は，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1$$

さらに，端点制約は

$$\beta_{-1} = \gamma_0 - \gamma_1 = 0$$

この制約は，実際は

$$\gamma_0 = \gamma_1$$

という意味がある。したがって，

$$\beta_0 = \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 = 2\beta_0$$

$$\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 = 3\beta_0$$

となり，回帰式は

$$y_t = \alpha + \beta_0(x_t + 2x_{t-1} + 3x_{t-2}) + \varepsilon_t,$$

と簡略化できる。

6.3

アーモン分布ラグモデルの推定。

6.4

二項選択モデルの推定。

6.5

三項選択モデルの推定。

6.6

トービット 2 モデルの推定。

6.7

パネル回帰の推定。

6.8

SUR モデルの推定。

6.9

単一方程式法の練習。

6.10

システム推定法の練習。

6.11

次数条件は明らか。回数条件は，第 1 行は排除された変数のリスト，
第 1 列を投資以外の内生変数のリストとして，

	W	$trend$	tax	W_g	G	X_{-1}	C	W_p	X
P	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
W	0	0	0	1	0	0	0	1	0
C	α_3	0	0	0	0	0	-1	0	0
W_p	0	γ_3	0	0	0	γ_2	0	-1	γ_1
X	0	0	0	0	1	1	1	0	-1

となる。最初の 5 列を見れば，要素は 1 個ずつしかなく，ランクは明らかに 5
であるから，階数条件は満たされる。

7 統計分析の基礎

本文中で入れるべきであった，中心極限定理の利用についての例題を追加します。

[中心極限定理の例 1]

母分布は (0,1) 区間の一様分布とする。観測個数が 12 の無作為標本を元に，
確率

$$P\left(\frac{1}{3} < \bar{X} < \frac{2}{3}\right)$$

を求める。例 7.1 により，母分布の平均と分散は $1/2$ ， $1/12$ となる。ここで中心極限定理も使うために，標本平均を標準化する。

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} < \bar{X} < \frac{2}{3}\right) &= P\left\{\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) < \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(\bar{X} - \frac{1}{2}) < \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= P\left\{-12\frac{1}{6} < Z < 12\frac{1}{6}\right\} \\ &= P\{-2 < Z < 2\} \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

最後の確率は，付表 2 から求めているが，大まかな近似に過ぎない。このように，標本平均 \bar{X} がある区間 (a,b) に入る確率は，本来求めることが非常に難しいが，中心極限定理により，標準正規分布表を用いて近似することができる。より精密な分布表を使えば，この近似は 0.0454 となる。観測個数 12 は計算を簡単にするために選んだもので，中心極限定理の応用には多少少ない。

[中心極限定理の例 2]

パレート分布を母分布とし，無作為標本の観測個数は 8， $\alpha=4$ とする。

$$P\left(m < \bar{X} < m + \frac{m}{2}\right)$$

を求めよう。この確率は，標本平均が，最低所得以上で，最低所得の二倍以下になる確率である。パレート分布の平均と分散を計算すると，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_m^{\infty} x \cdot \alpha m^{\alpha} x^{-\alpha-1} dx \\ &= \int_m^{\infty} \alpha m^{\alpha} x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} m \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_m^{\infty} x^2 \cdot \alpha m^{\alpha} x^{-\alpha-1} dx \\ &= \int_m^{\infty} \alpha m^{\alpha} x^{1-\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-2} m^2 \end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{\alpha}{\alpha-2} m^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} m\right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} m^2. \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
 & P\left(m < \bar{X} < m + \frac{m}{2}\right) \\
 &= P\left(m - \frac{\alpha}{\alpha-1}m < \bar{X} - \frac{\alpha}{\alpha-1}m < \frac{m}{2} + m - \frac{\alpha}{\alpha-1}m\right) \\
 &= P\left(-\frac{1}{\alpha-1}m < \bar{X} - \frac{\alpha}{\alpha-1}m < \frac{\alpha-3}{2(\alpha-1)}m\right) \\
 &= P\left(\sqrt{n}\left(-\frac{1}{\alpha-1}m\right) \cdot \frac{(\alpha-1)\sqrt{(\alpha-2)}}{m\sqrt{\alpha}} < Z < \sqrt{n}\frac{\alpha-3}{2(\alpha-1)}m \cdot \frac{(\alpha-1)\sqrt{(\alpha-2)}}{m\sqrt{\alpha}}\right) \\
 &= P\left(-\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{(\alpha-2)}}{\sqrt{\alpha}} < Z < \sqrt{n}(\alpha-3) \cdot \frac{\sqrt{(\alpha-2)}}{2\sqrt{\alpha}}\right)
 \end{aligned}$$

となる。この不等式は m に依存しない。ここで数値を代入すると,

$$\begin{aligned}
 &= P\left(-2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} < Z < 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\
 &= P(-2 < Z < 1)
 \end{aligned}$$

となり, ほぼ 82 パーセントと計算できる。

7.1

このような確率変数を \bar{X}, \bar{Y} とする。この二つの確率変数は独立に分布するから, 同時確率関数を表で書くと,

確率	$\bar{X} = -1$	0	1
$\bar{Y} = -1$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$
0	$\frac{4}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$
1	$\frac{4}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$

Z の値	$\bar{X} = -1$	0	1
$\bar{Y} = -1$	-1	-0.5	0
0	-0.5	0	0.5
1	0	0.5	1

とまとめることができる。だから,

$$P(Z = -1) = \frac{1}{81},$$

$$P(Z = -0.5) = \frac{8}{81},$$

$$P(Z = 0) = \frac{24}{81},$$

$$P(Z = 0.5) = \frac{32}{81},$$

$$P(Z = 1) = \frac{16}{81}$$

となる。平均, 分散は明らか。

7.2

ちょっと、難し過ぎたかもしれません。n=3 のケースを考える。X の積は、-1 が 1 しかとらない。-1 が 3 回の確率は $(\frac{1}{3})^3$ 、-1 が 2 回の確率は $3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$ 、-1 が 1 回の時は $3(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2$ 、-1 が 0 回の確率は $(\frac{2}{3})^3$ となる。したがって、平均は

$$\begin{aligned} E(Z) &= -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

二乗の期待値は

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\right)^3 \\ &= (1)^3 = 1 \end{aligned}$$

そして分散は

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 \end{aligned}$$

となる。この計算は、一般化でき

$$\begin{aligned} E(Z) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ V(Z) &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

7.3

x が $\sqrt{2}$ までの三角形，面積は 1 となる。平均は

$$E(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x \times x dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

二乗の期待値は

$$E(X^2) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \times x dx = 1$$

となるから，分散は

$$V(X) = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

となる。

7.4

$P(-1)=1/3, P(1)=2/3$. 無作為標本を $\{X_1, X_2, X_3\}$ とすれば，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{3-1} \{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 3\bar{X}^2\} \end{aligned}$$

だから，

1. 全て-1なら，数値を代入して計算し， $s^2 = 0$, 確率は， $(\frac{1}{3})^3$.
 2. 1個1，2個-1なら， $s^2 = \frac{4}{3}$, 確率は組み合わせを考慮して， $3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$.
 3. 2個1，1個-1なら， $s^2 = \frac{4}{3}$, 確率は組み合わせを考慮して， $3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})$.
 4. 全て1なら， $s^2 = 0$, 確率は， $(\frac{2}{3})^3$.
- だから， s^2 は0と $\frac{4}{3}$ のは2値しか取らず，
 $s^2 = 0$, 確率は， $(\frac{1}{3})^3 + (\frac{2}{3})^3 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.
 $s^2 = \frac{4}{3}$, 確率は， $3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.
 平均は， $\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

7.5

事象毎に \bar{X} と s^2 の結果をまとめると，

事象	確率	\bar{X}	s^2
(-1,-1)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	-1	0
(-1,1) or (1,-1)	$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$	0	2
(1,1)	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	1	0

となる。次に， \bar{X} と s^2 の分布表を作ると，

	$\bar{X} = -1$	$\bar{X} = 0$	$\bar{X} = 1$	s^2
$s^2 = 0$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
$s^2 = 2$	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
\bar{X}	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

周辺確率の積は同時確率に一致しないから， \bar{X} と s^2 は独立には分布していない。平均を求めると，

$$E(\bar{X}) = (-1) \times \frac{1}{9} + 0 \times \frac{4}{9} + (1) \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$$

$$E(s^2) = 0 \times \frac{5}{9} + (2) \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

となる。同様に計算すると、積の期待値は

$$E(\bar{X} \times s^2) = 0.$$

したがって、共分散は、

$$\text{Cov}(\bar{X}, s^2) = -\frac{1}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{-8}{27}.$$

7.6

周辺確率と、同時確率が矛盾しないように決める。同じ行動を取るなら、

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.5	0	0.5
B=以外	0	0.5	0.5
A	0.5	0.5	1

全く逆の行動なら、

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0	0.5	0.5
B=以外	0.5	0	0.5
A	0.5	0.5	1

よく似た行動の例としては、

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.4	0.1	0.5
B=以外	0.1	0.4	0.5
A	0.5	0.5	1

ほぼ逆の行動は

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.1	0.4	0.5
B=以外	0.4	0.1	0.5
A	0.5	0.5	1

独立な場合は簡単で、周辺確率の積を求め

	A=生協	A=以外	B
B=生協	0.25	0.25	0.5
B=以外	0.25	0.25	0.5
A	0.5	0.5	1

7.7

$Z=XY$ の確率関数は,

Z	0	1	2	4
P	$\frac{1}{15} + 2\frac{4}{15} + 2\frac{1}{15} = \frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$	0+0	0

となる。Z の確率関数は

Z	0	1
P	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$

と等しい。したがって、大きさが3の無作為標本であると,

1. $V=0$, 確率は, $(\frac{11}{15})^3$.
2. $V=1$, 確率は, $3(\frac{11}{15})^2(\frac{4}{15})$.
3. $V=2$, 確率は, $3(\frac{11}{15})(\frac{4}{15})^2$.
4. $V=3$, 確率は, $(\frac{4}{15})^3$.

7.8

事象毎に \bar{X} と s^2 の結果をまとめると,

事象	確率	\bar{X}	s^2
(-1,-1,-1)	$\frac{1}{27}$	-1	0
(-1,-1,1)	$3 \times \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
(-1,1,1)	$3 \times \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
(1,1,1)	$\frac{8}{27}$	1	0

となる。次に, \bar{X} と s^2 の分布表を作ると,

	$\bar{X} = -1$	$\bar{X} = -\frac{1}{3}$	$\bar{X} = \frac{1}{3}$	$\bar{X} = 1$	s^2
$s^2 = 0$	$\frac{1}{27}$	0	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{9}{27}$
$s^2 = \frac{4}{3}$	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	0	$\frac{18}{27}$
\bar{X}	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

周辺確率の積は同時確率に一致しないから, \bar{X} と s^2 は独立には分布していない。以下, 同様。