付け値地代曲線の傾きを求める

付け値地代曲線の傾きを厳密に求める方法は、本講義が前提とする数学のレベルを超えるが、関心を持つ受講者もいるはずなのでこのノートを作成した。期末試験には出さないので、単位のほしいだけの受講者はこれを習得する必要はない。しかし以下で述べる手法は、「包絡線定理」の格好の例なので、より進んだ経済学の学習には有益である。

都心からの距離 t の地点における付け値地代 $r^b(t)$ は、効用水準 $\bar{u}$ を達成しながら支払える最大の地代と定義されるので、次のように書ける。

$$r^b(t) = \max_{z,q}\left\{\frac{y-z-kt}{q} \mid u(z,q)=\bar{u}\right\} \tag{1}$$

上の最大化問題を解くため、ラグランジュ関数 $L(z,q,l,t)$ を定義する。

$$L(z,q,l,t) = \frac{y-z-kt}{q} + l\,(u(z,q)-\bar{u}) \tag{2}$$

ここに l は効用水準に関する制約条件に対するラグランジュ乗数である。そして次が成立する。

$$r^b(t) = \max_{z,q,l} L(z,q,l,t) \tag{3}$$

ラグランジュ関数を最大化する z, q, l の条件は

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{1}{q} + l\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{y-z-kt}{q^2} + l\,\frac{\partial u}{\partial q} = 0 \tag{4b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = u(z,q) - \bar{u} = 0 \tag{4c}$$

これを解いて得られた解を $z^*(t), q^*(t), l^*(t)$ と書けば[1]、(3)より

$$r^b(t) = L(z^*(t), q^*(t), l^*(t), t)$$

付け値曲線の傾きは、t に関する導関数なので

[1] これらの解は t だけでなく、他のパラメータ $y, \bar{u}, k$ にも依存しているので、$z^*(t, y, \bar{u}, k)$ のように書くべきであるが、ここでは t のみに着目しているので、記号の煩雑化を避けるため、t のみの関数として表した。

$$\frac{dr^b(t)}{dt}=\frac{\partial L}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial L}{\partial l}\frac{dl}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}$$

ところが上式右辺の最初の 3 項目までは最大化の条件(4a)-(4c)を考慮するとゼロである(包絡線定理)。したがって

$$\frac{dr^b(t)}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{k}{q^*(t)}$$

ところで教科書 50 ページの図 4-4 に示したように、t が大きくなると（都心から遠ざかると）$q^*(t)$ は増大する。したがって上式右辺の分母は大きくなる。分母が大きくなるということは、傾きの絶対値が小さくなることを意味するので、付け値地代曲線の傾きは都心から離れるにしたがって緩くなるのである。したがって図 4-6 に描かれたタイプ①のように、付け値地代曲線は原点に対して凸になるのである。