

社会経済学2 (2012年度後期)

第5回: カルドア・モデル

担当者: 佐々木 啓明*

*E-mail: sasaki@econ.kyoto-u.ac.jp; URL: <http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~sasaki/>

——はじめに——

これまで取り上げた新古典派成長モデル, 内生的成長モデル, ハロッド・モデル, これらはすべて均衡動学モデルであった.

→ 財市場はつねに均衡し, 総生産と総需要はつねに等しい.

カルドアは不均衡動学モデルを開発した.

→ 財市場が超過需要ならば生産が増え, 超過供給ならば生産が減る.

→ 財市場における数量調整. 価格調整は考えない.

ソロー・モデルは安定, ハロッド・モデルは不安定.

現実には安定と不安定の間. 産出は循環的変動を示す.

Kaldor, N. (1940) "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal* 50, pp. 78–92.

Chang, W. and Smyth, D. (1971) "The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined," *Review of Economic Studies* 38, pp. 37–44.

——非線形の投資関数——

カルドアは利潤原理に基づく非線形の投資関数を仮定した.

$$\dot{K} = I = I(\Pi, K), \quad I_{\Pi} > 0, \quad I_K < 0. \quad (1)$$

Π : 実質利潤, K : 資本ストック.

分配率がほぼ一定と考えられるから, Π は Y の増加関数.

$$\dot{K} = I(Y, K), \quad I_Y > 0, \quad I_K < 0. \quad (2)$$

さらに, 投資関数は Y についてS字型であると仮定する(非線形性).

——線形の貯蓄関数——

貯蓄 S は所得から消費 C を引いたものなので、まずは消費関数を定式化する。

$$C = cY + c_0, \quad 0 < c < 1, c_0. \quad (3)$$

c : 消費性向, c_0 : 独立消費.

これより貯蓄は,

$$S = Y - C = (1 - c)Y - c_0 = sY - c_0, \quad s = 1 - c. \quad (4)$$

s : 貯蓄性向.

——産出と資本ストックの動学方程式——

Y と K の動学方程式は,

$$\dot{Y} = \alpha[I - S] = \alpha[I(Y, K) - sY + c_0], \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

$$\dot{K} = I(Y, K). \quad (6)$$

α : 財市場の調整速度.

これらは Y と K に関する非線形連立微分方程式を表している.

定常状態は $\dot{Y} = \dot{K} = 0$ となる状態.

定常状態にいたる過程は位相図を用いて分析する.

——位相図による分析——

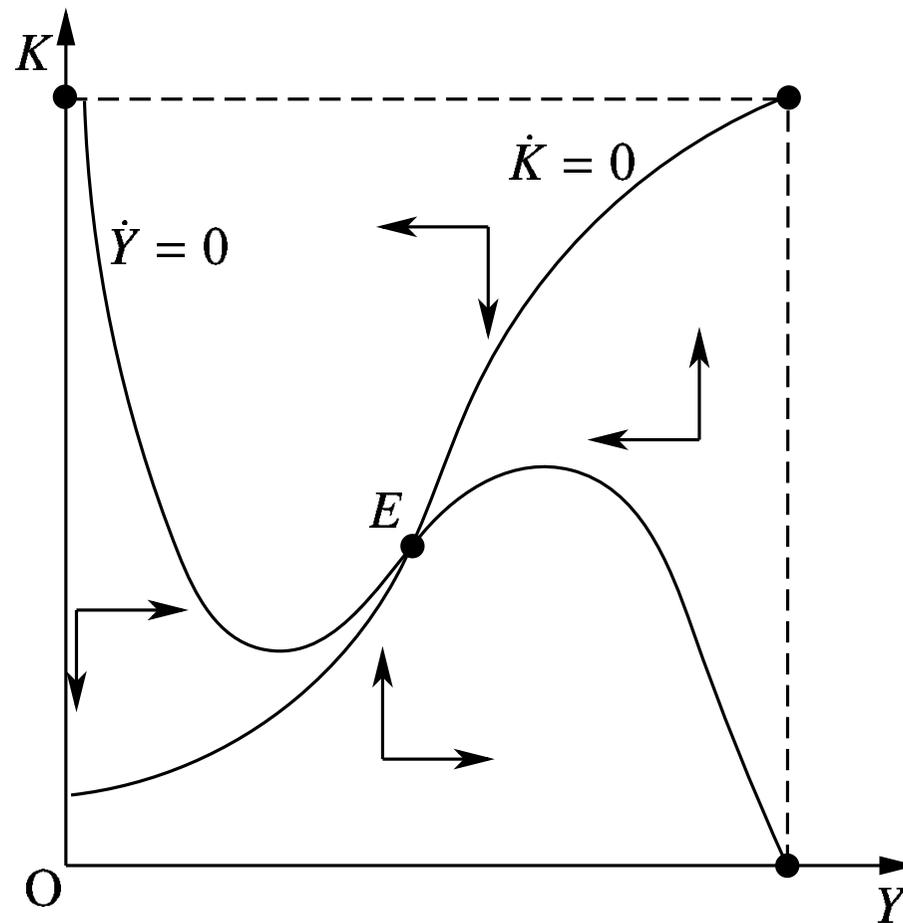


Figure 1: カルドア・モデルの位相図

——永続的な景気循環の発生——

均衡点 E で求心力が働けば, ある初期値から出発した経済は均衡点に収束する.

均衡点 E で遠心力が働けば, リミット・サイクル(極限閉軌道)が存在し, 経済はそれに収束する(ポアンカレ・ベンディクソンの定理).

リミット・サイクルに乗れば, Y と K の組み合わせは, 永遠に反時計回りに回り続ける.

→ 永続的な景気循環が発生する.

——遠心力が発生する条件——

ヤコビ行列を \mathbf{J} とすれば,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - s) & \alpha I_K \\ I_Y & I_K \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\det \mathbf{J} = -\alpha s I_K > 0, \quad (8)$$

$$\text{tr } \mathbf{J} = \alpha(I_Y - s) + I_K. \quad (9)$$

均衡が局所的に安定となる必要十分条件は, $\det \mathbf{J} > 0$ かつ $\text{tr } \mathbf{J} < 0$.
 $\det \mathbf{J} > 0$ は確定だが, $\text{tr } \mathbf{J} < 0$ は不明.

$\alpha(I_Y - s) + I_K > 0$ であれば均衡は局所的に不安定となり, 遠心力が働くから, リミット・サイクルが生じる.