2013年3月16日　進化経済学会　中央大学

期待効用理論の批判的評価

岡　敏弘 (福井県立大学経済学部)*1

*1 910-1195 福井県吉田郡永平寺町松岡兼定島4-1-1，0776-61-6000，oka @ fpu.ac.jp, http://www.s.fpu.ac.jp/oka.

1　はじめに

- 期待効用理論に反する現実
- プロスペクト理論
- 基数的効用概念
- 一般化された期待効用理論
- 序数主義的理論

2 期待効用理論

- フォン・ノイマンとモルゲンシュテルン
  - 完全性・推移性・連続性・独立性
- プロスペクト

$$(0.1, 0.9; 0\,\text{ドル}, 500\text{万ドル})$$

$$(p_1, p_2, \cdots, p_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- 独立性とは

$$A \succsim B \Leftrightarrow (\alpha, 1-\alpha; A, C) \succsim (\alpha, 1-\alpha; B, C)$$

- 期待効用仮説
  $A = (p_1, p_2, \cdots, p_n; a_1, a_2, \cdots, a_n), B = (q_1, q_2, \cdots, q_n; b_1, b_2, \cdots, b_n)$ のとき、効用 $U(a_i), U(b_i)$ を使って期待効用 $EU(A) = \sum_{i=1}^n p_i U(a_i), EU(B) = \sum_{i=1}^n q_i U(b_i)$ が定義できて、

$$A \succsim B \Leftrightarrow EU(A) \geqq EU(B)$$

- $EU(A) \geqq EU(B)$ であれば、明らかに
  $\alpha EU(A) + (1-\alpha)EU(C) \geqq \alpha EU(B) + (1-\alpha)EU(C)$ となるから、
  $A \succsim B \Longrightarrow \alpha A + (1-\alpha)C \succsim \alpha B + (1-\alpha)C$、すなわち、期待効用仮説が成り立てば、独立性が成り立つ。

- **期待効用理論とリスク回避**

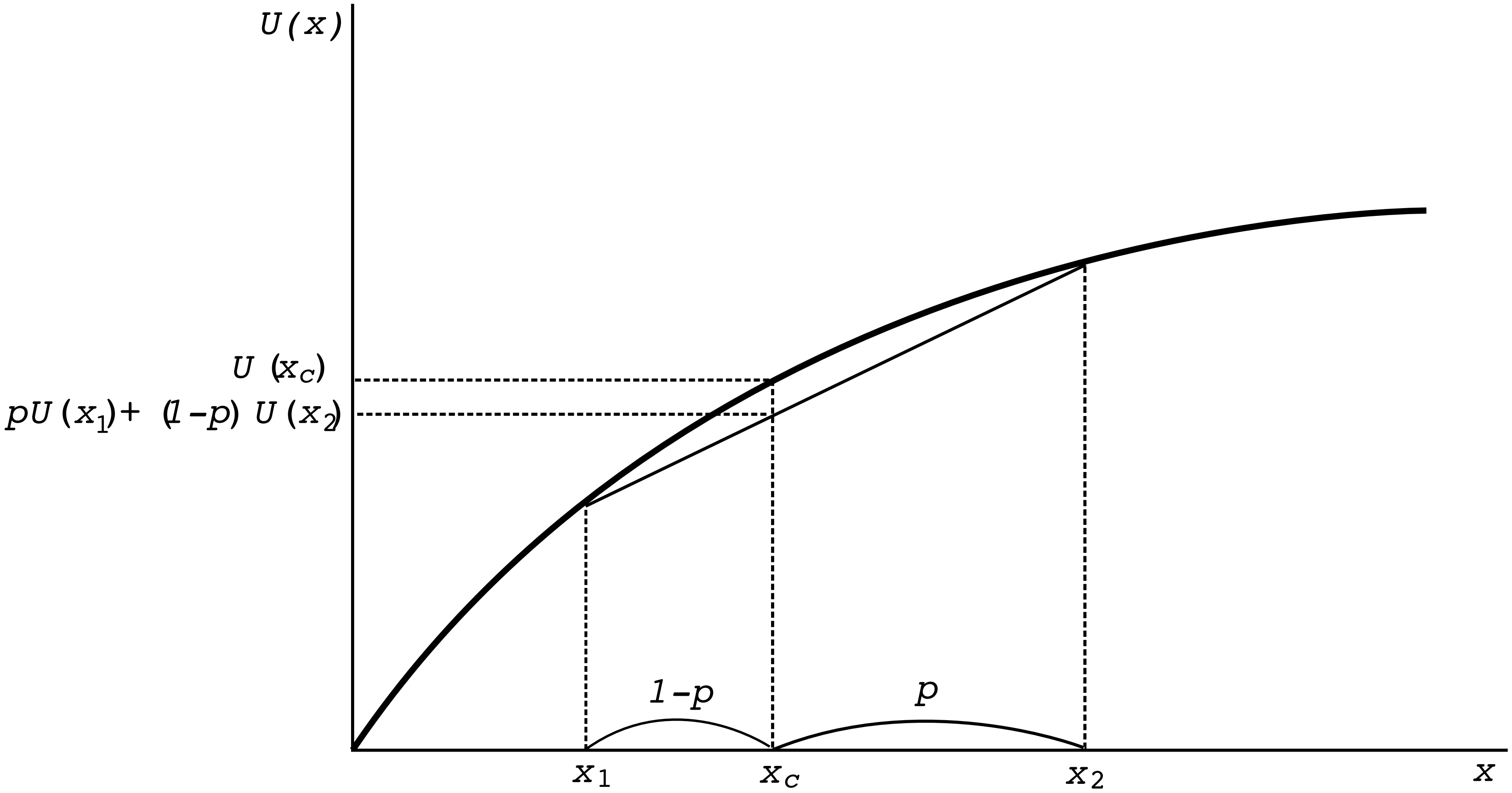


図１　期待効用理論―リスク回避の場合―

3　期待効用理論の難点

3.1　独立性公理への反例

- **反例1—共通結果効果**

$$\begin{cases} a_1 = (0,1,0\,;\ \ 0,1,5) & (\text{金額の単位は100万ドル、以下同じ}) \\ a_2 = (0.01, 0.89, 0.10\,;\ \ 0,1,5) \\ a_3 = (0.89, 0.11, 0\,;\ \ 0,1,5) \\ a_4 = (0.90, 0, 0.10\,;\ \ 0,1,5) \end{cases}$$

で、$a_1 \succ a_2$**かつ**$a_4 \succ a_3$(Allais 1952)。**これは独立性に反する。なぜなら、**

$$\begin{cases} a^* = \left(\frac{1}{11}, 0, \frac{10}{11}\ ;\ \ 0,1,5\right) \\ k = (0,1,0\ ;\ \ 0,1,5) \\ C^* = (0,1,0\ ;\ \ 0,1,5) \\ c^* = (0,0,1\ ;\ \ 0,1,5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = (0.11, 0.89\ ;\ \ k, C^*) \\ a_2 = (0.11, 0.89\ ;\ \ a^*, C^*) \\ a_3 = (0.11, 0.89\ ;\ \ k, c^*) \\ a_4 = (0.11, 0.89\ ;\ \ a^*, c^*) \end{cases}$$

- **反例2—共通比率効果**

$$\begin{cases} c_1 = (0.1, 0.9, 0\ ;\ \ 0, 3000, 6000) \quad (\text{金額の単位はドル、以下同じ}) \\ c_2 = (0.55, 0, 0.45\ ;\ \ 0, 3000, 6000) \\ c_3 = (0.998, 0.002, 0\ ;\ \ 0, 3000, 6000) \\ c_4 = (0.999, 0, 0.001\ ;\ \ 0, 3000, 6000) \end{cases}$$

で、$c_1 \succ c_2$ **かつ** $c_4 \succ c_3$ (Kahneman and Tversky 1979)**。これも独立性公理に反する。なぜなら、**$n = (1, 0, 0,\ ;\ 0, 3000, 6000)$ **とすると、**

$$\begin{cases} c_3 = \left(\frac{1}{450}, \frac{449}{450}\ ;\ \ c_1, n\right) \\ c_4 = \left(\frac{1}{450}, \frac{449}{450}\ ;\ \ c_2, n\right) \end{cases}$$

また、$X = 3000, Y = 6000, p = 0.9, q = 0.45, \alpha = 1/450$ **とすると、**c_1**〜**c_4 **は**

$$\begin{cases} c_1 : p\text{の確率で}X\text{が得られ、}1-p\text{の確率で何も得られない} \\ c_2 : q\text{の確率で}Y\text{が得られ、}1-q\text{の確率で何も得られない} \\ c_3 : \alpha p\text{の確率で}X\text{が得られ、}1-\alpha p\text{の確率で何も得られない} \\ c_4 : \alpha q\text{の確率で}Y\text{が得られ、}1-\alpha q\text{の確率で何も得られない} \end{cases}$$

- **反例**3—**効用評価効果** (Machina 1983)

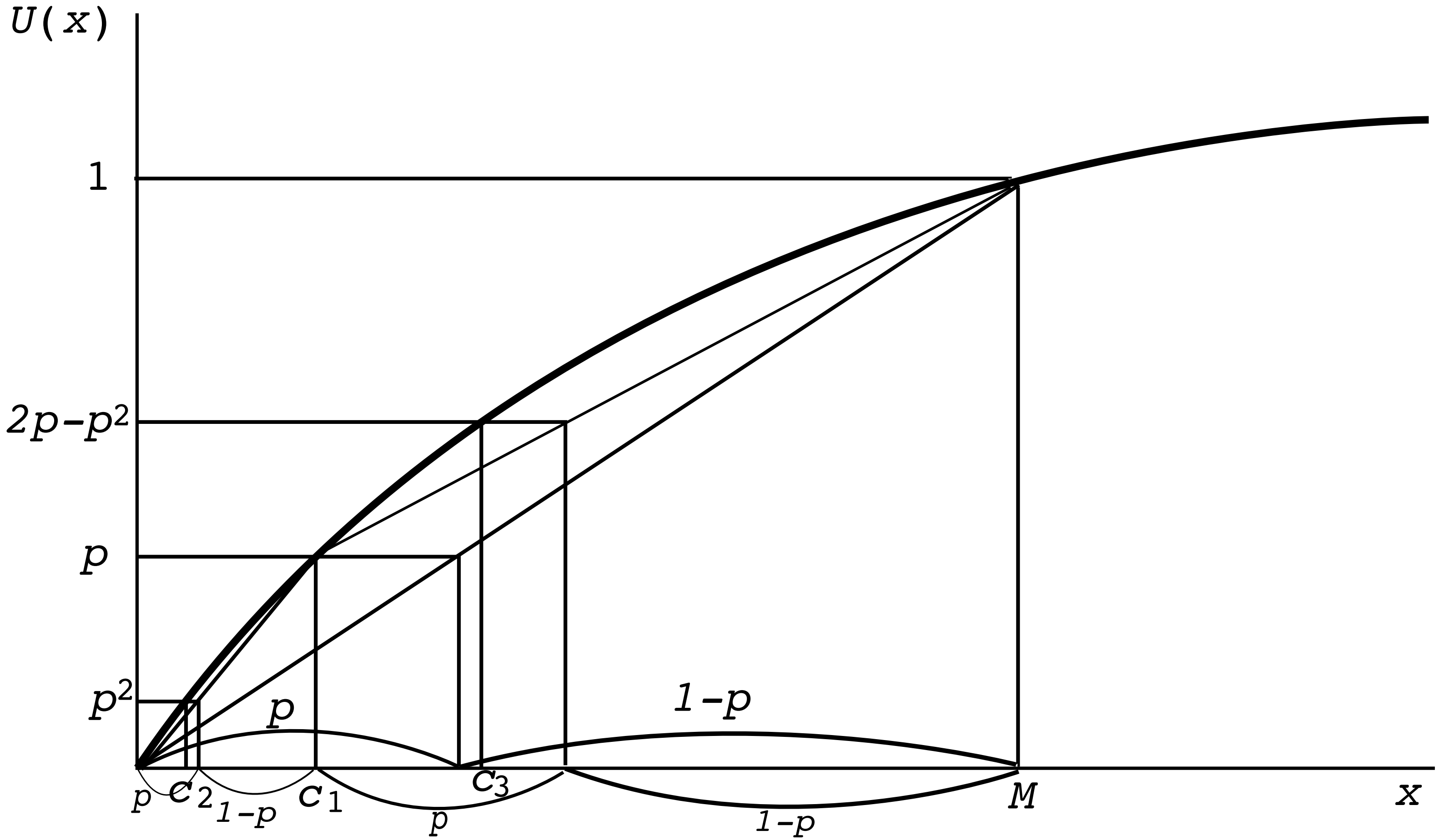
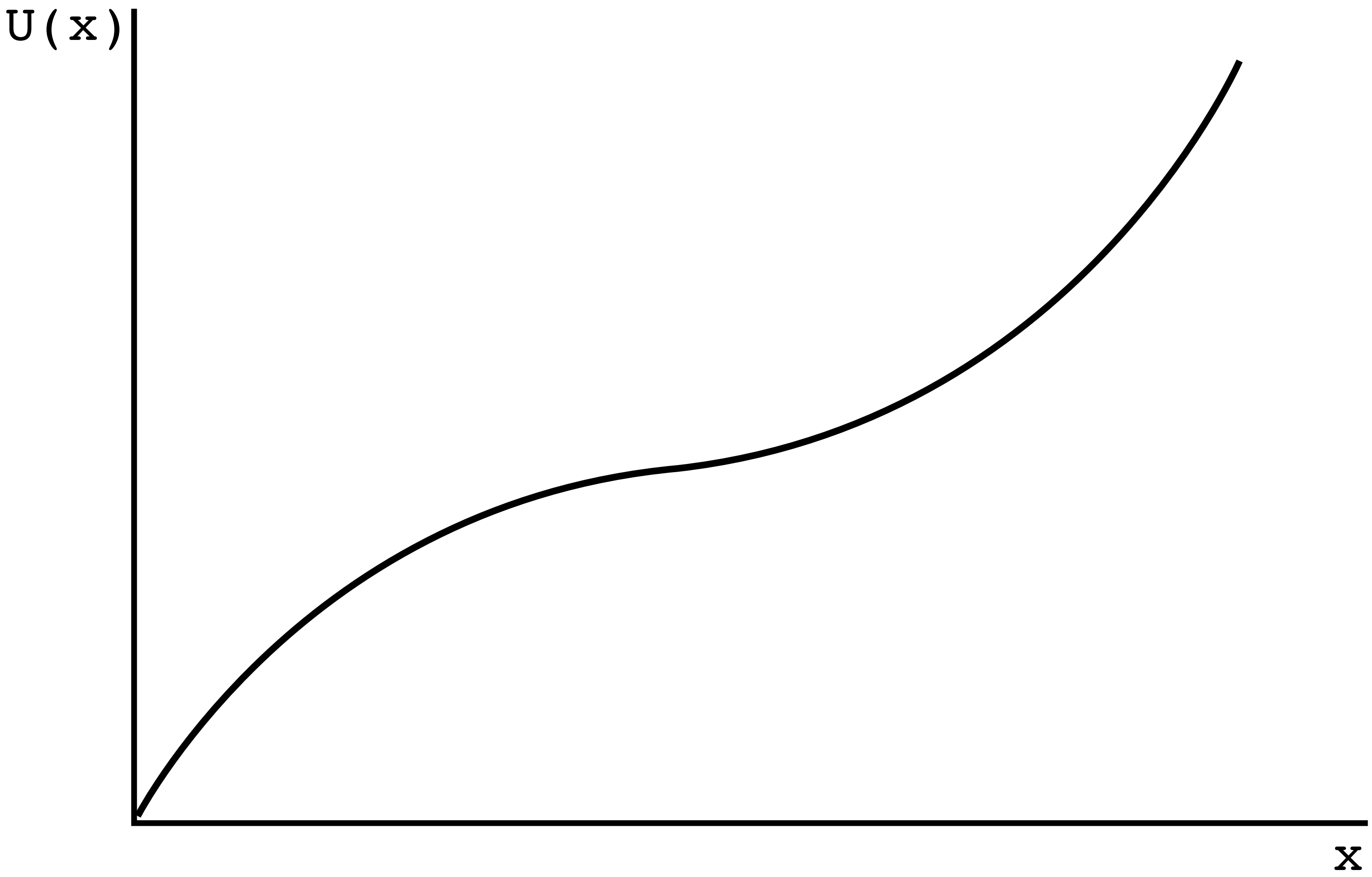


図2　**期待効用理論を使った効用関数の推定**

3.2 保健と賭け



4　プロスペクト理論

- $\sum_{i=1}^{n} \pi(p_i)v(x_i)$ を最大化。
- **価値関数**: x_1, $x_2(x_1 < 0 < x_2)$ について、$v'(x_1) > v'(x_2), v''(x_1) > 0, v''(x_2) < 0$
- **確率重み付け関数**: $\pi(0) = 0, \pi(1) = 1$ だが、$0 \leqq p \leqq 1$ で $\pi(p)$ は連続ではなく、p が 0 に近いとき $\pi(p) > p$ だが、$0 < p < 1$ で $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$

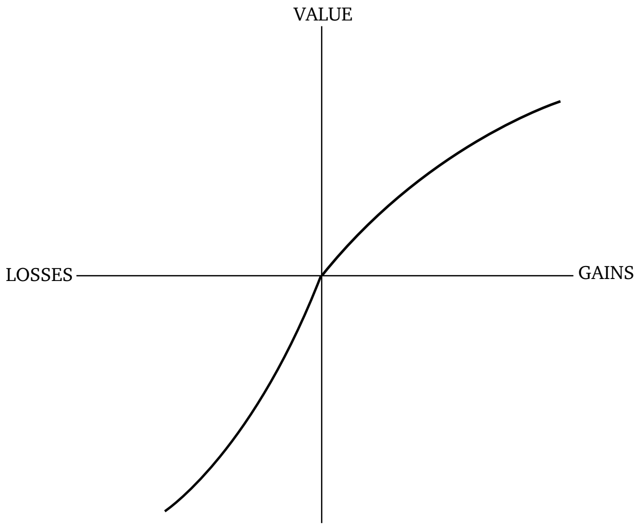


図3　カーネマンとトベルスキーの価値関数

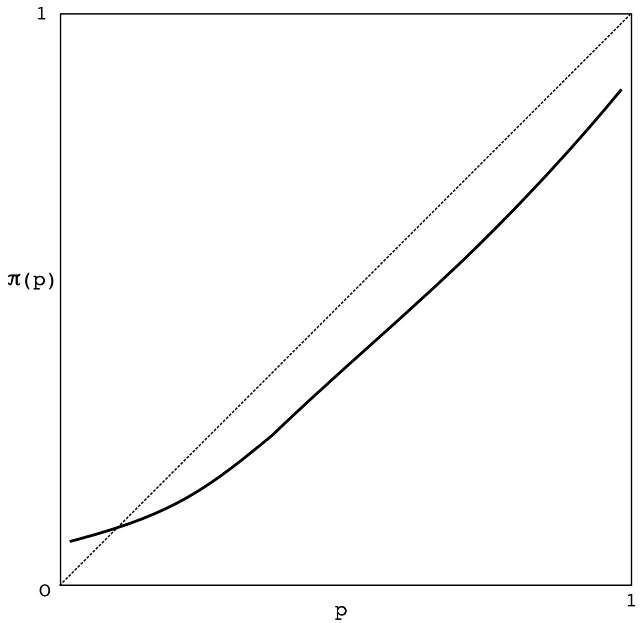


図4　カーネマンとトベルスキーの確率重み付け関数

- **反例**1
  $\pi(1)=1, \pi(0)=0, v(0)=0$ **とすると、**

$$[1-\pi(0.89)]v(1) > \pi(0.1)v(5) > \pi(0.11)v(1)$$

つまり

$$\frac{\pi(0.1)}{\pi(0.11)} > \frac{v(1)}{v(5)} > \frac{\pi(0.1)}{1-\pi(0.89)}$$

であれば説明できる。

- **反例**2

$$\frac{\pi(0.001)}{\pi(0.002)} > \frac{v(3000)}{v(6000)} > \frac{\pi(0.45)}{\pi(0.9)}$$

であれば、c_2 **よりも** c_1 **が選ばれ、かつ、**c_3 **よりも** c_4 **が選ばれる。**

- **保健と賭け**
  非常に低い確率について$\pi(p) > p$**であれば、価値関数の形にもかかわらず、保険と賭けをともに購入することがあり得る。**

- **プロスペクト理論の難点**
  - **説明装置の過剰**
  - **確率優位なプロスペクトが必ず選ばれるための条件たとえば、** $p > p', p + q = p' + q', x > y > 0$ **のとき、プロスペクト** $(p, q; x, y)$ **は** $(p', q'; x, y)$ **よりも明らかに有利であるが、これが必ず選択されるためには**

$$\pi(p)v(x) + \pi(q)v(y) > \pi(p')v(x) + \pi(q')v(y)$$

でなければならない。これは

$$\frac{\pi(p) - \pi(p')}{\pi(q') - \pi(q)} > \frac{v(y)}{v(x)}$$

を意味する。 x **を** y **に近づけるとき、** $v(y)/v(x)$ **は** 1 **に近づく。そこで、上の式が常に成り立つためには**

$$\pi(p) - \pi(p') \geqq \pi(q') - \pi(q)$$

でなければならない。

  - **「編集」と「価値付け」の** 2 **段階理論**

5　一般化された期待効用理論

- **期待効用は確率の線形関数**: $EU = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i)$
- **線形の仮定を外す**(Machina 1983)。
- **確率三角形**

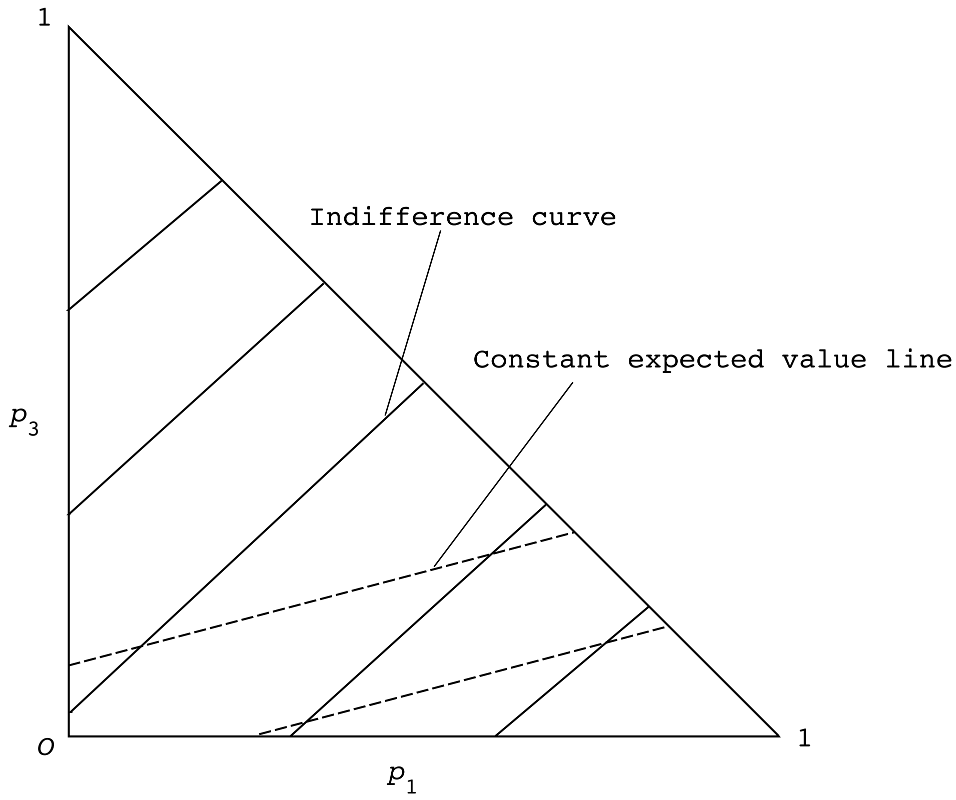


図5　**確率三角形**: **独立性が成り立つ場合**

- **反例**1

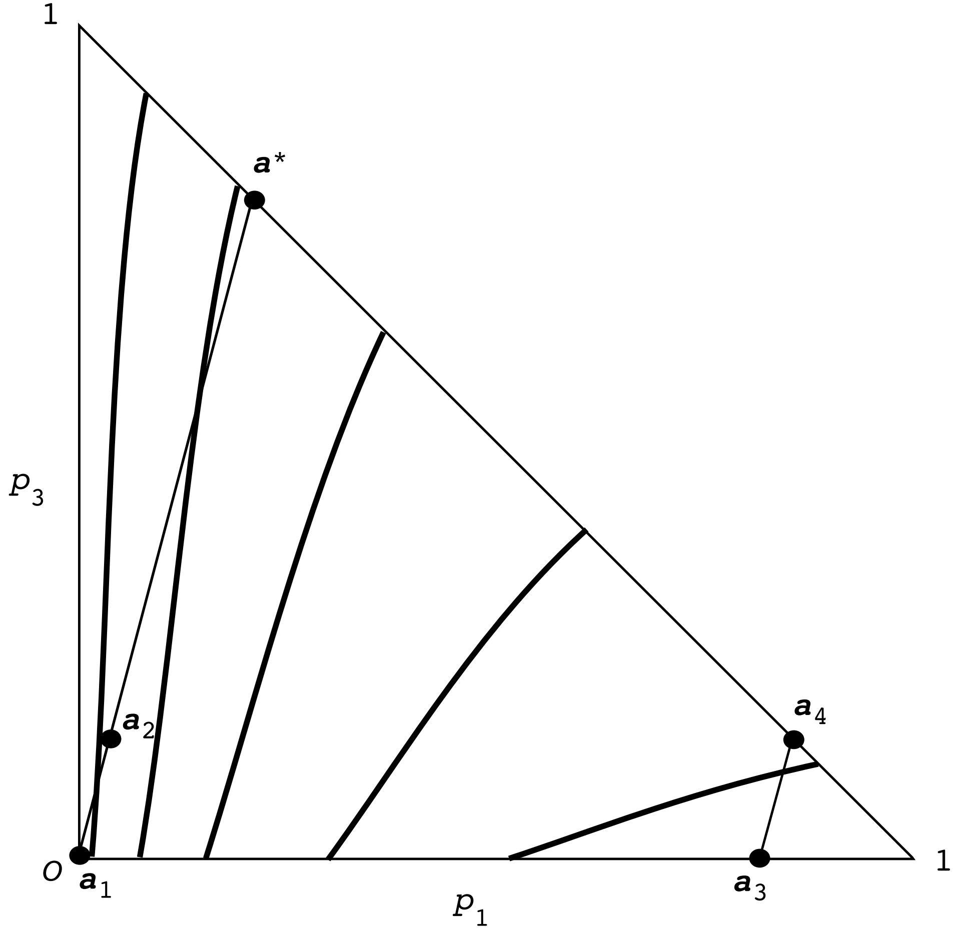


図6　**確率三角形: 共通結果効果**

- **反例**2

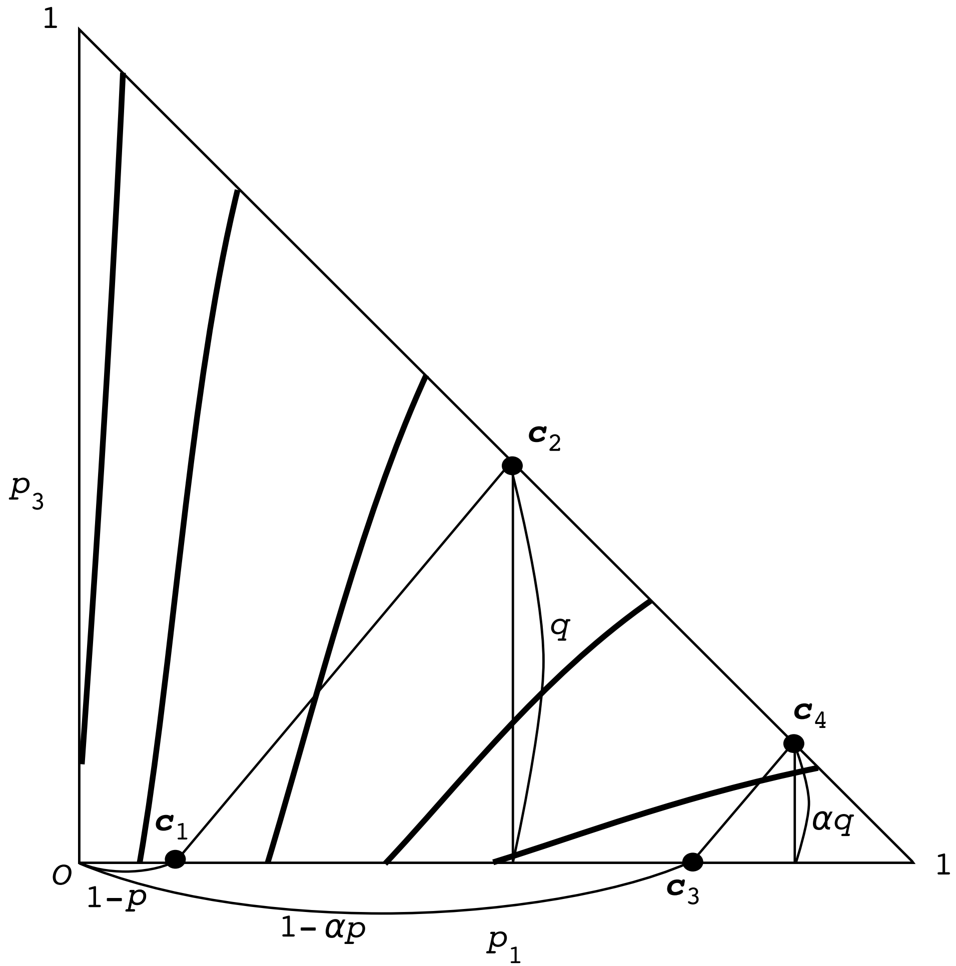


図7　**確率三角形**: **共通比率効果**

- **反例**3

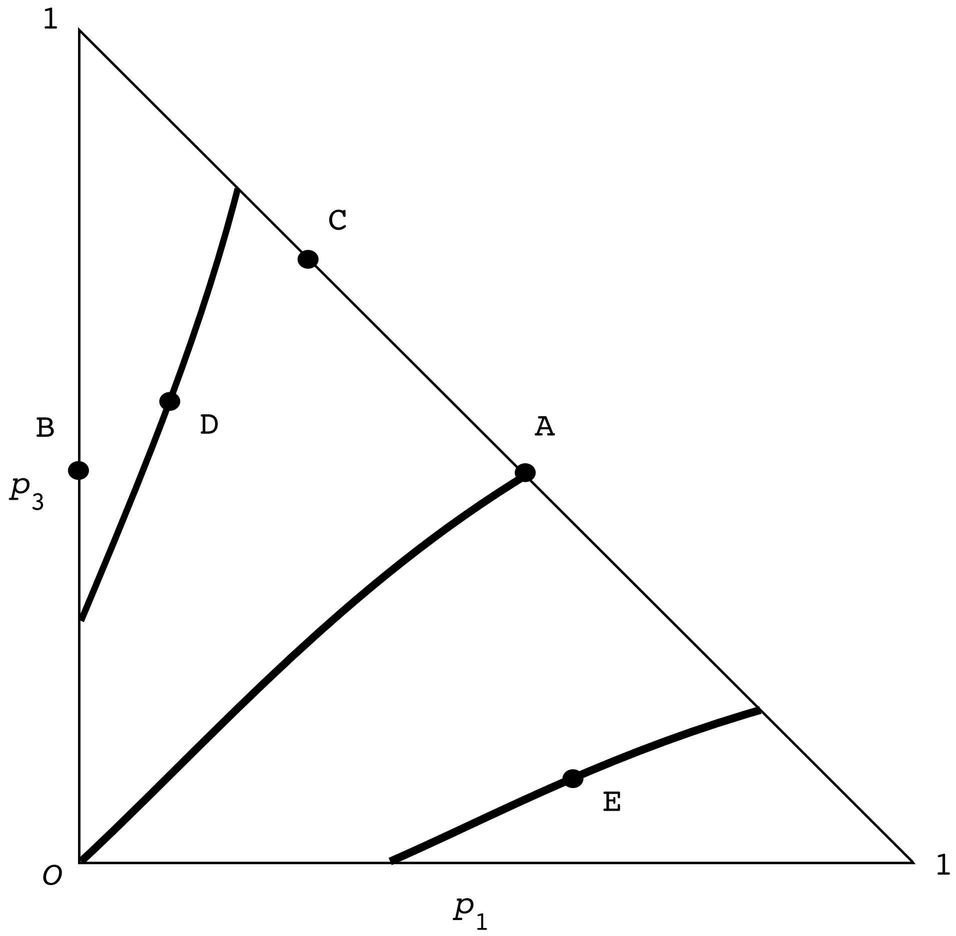


図8　**確率三角形: 効用評価効果**

低確率事象の確率変化の過大評価と保険・賭け

6　序数主義分析

- **ミシャンの枠組**(Mishan 1976)

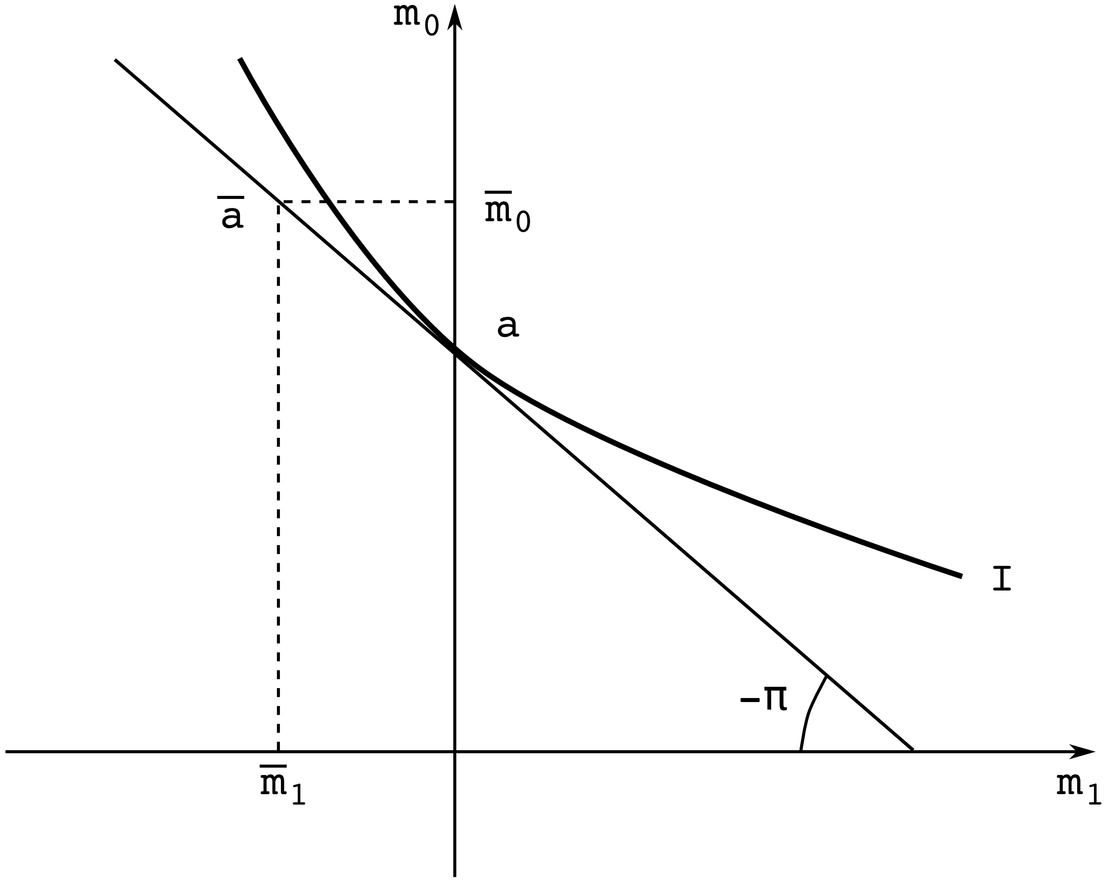


図9　**金額を変数とした序数主義分析**

● 保険を買い賭を買う

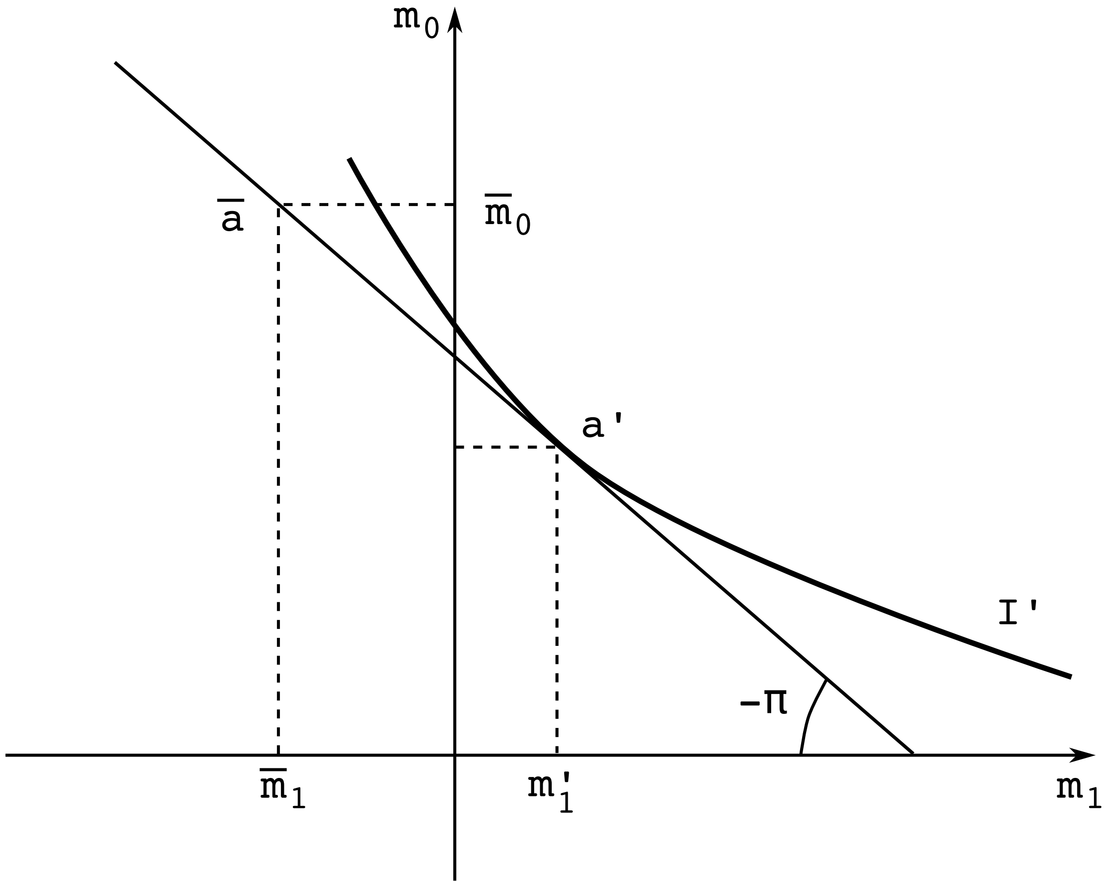


図10　**金額を変数とした序数主義分析—賭けを買う場合**

7　規範的分析への応用

- **人命の価値評価の課題**
  - **逸失所得による評価は、費用便益分析の厚生経済学的根拠に反する。**
  - **便益・費用は**WTP・WTA**でなければならないが、確実な死の**WTA**は無限大。**
- **微少な死亡率の増減への**WTA・WTP　**→　確率的生命の価値**
- **「期待効用理論による基礎付け」**

$$V_j = \sum_{t=j}^{T} (1+\rho)^{j-t} q_{j,t} U(c_t)$$

を最大化する—$\sum_{t=j}^{T} q_{j,t}(1+r)^{j-t}c_t = \sum_{t=j}^{T} q_{j,t}(1+r)^{j-t}y_t + W_j$ **の制約下で—。**

- **確実な死亡に対する有限の**WTA—Schepard and Zeckhauser**の例**
  $q_{1,2} = 0.9, q_{1,3} = 0.6, q_{1,4} = 0, W_1 = 100, y_k = 0 (k = 1, 2, 3), \rho = 0, U(c_k) = c_k^{0.2}$ **のとき、**V **を最大にする消費は**$c_1 = 41.59, c_2 = 36.45, c_3 = 21.96, V = 5.068$**。第**2**期の死亡率を**1**に引き上げる変化にもかかわらず、第**1**期にある人の生涯期待効用を**5.068**に維持するような初期所得の額は**269.6**。よって、第**2**期の確実な死亡をもたらす変化に対する**WTA**が**169.6**になる。**

8　むすび

- **期待効用理論の難点を前にして**2**つの道があった。**
  1. **価値関数・確率重み付け関数を付け加えて仮定を増やしていくプロスペクト理論の道**
  2. **単に独立性を外す道**

  前者は、基数主義を貫き、その欠点を直していく道。後者は基数主義を捨てて序数主義をとる道。
- **序数主義の道の長所**
  1. **一般の消費者選択理論との整合性**
  2. **仮定を減らして多くを説明する効率性**
  3. **現実適用での十分性**

付録—放射能汚染と温暖化

	放射能汚染	温暖化
広がり	ローカル	グローバル
害の中身	人健康(がん)だけ	生態系
未知性	よくわかった	得体が知れない
リスク/不確実性	確率で表現できる	真の不確実性