社会経済学2 (2018年度前期)

第3回: 内生的成長モデル

担当者: 佐々木 啓明[*]

[*]E-mail: sasaki@econ.kyoto-u.ac.jp; URL: http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/˜sasaki/

——はじめに——

新古典派成長モデルでは, 長期における1人当たり成長率は技術進歩率に等しくなった.

しかし, その技術進歩率自体はモデルの外から与えられていた.

ここでは, 技術進歩が研究開発(R&D)への投資により生じるモデルを説明する.

1. 経済には最終財生産部門と知識生産部門が存在する.
2. 最終財の生産には資本ストックと労働が投入され, 知識の生産には労働が投入される.
3. それら以外はほとんど新古典派成長モデルと同じ.

——生産関数——

最終財部門の生産関数.

$$Y = K^{\alpha}(AL_Y)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Y: 最終財の産出量, K: 資本ストック, A: 知識水準, L_Y: 最終財部門の雇用量.

総人口の動学方程式.

$$\dot{L} = nL, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

資本ストックの動学方程式.

$$\dot{K} = sY - \delta K. \tag{3}$$

——R&D部門——

R&D部門では, 労働と現行の知識を用いて新たな知識が生産される.

$$\dot{A} = \gamma L_A A^{\phi}, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

$\dot{A}$: 知識のフロー, L_A: R&D部門の雇用量.

$\phi > 0$: 知識の蓄積が新たな知識の生産を容易にする(肩車効果).

$\phi < 0$: 知識の蓄積が新たな知識の生産を困難にする(フィッシング・アウト効果).

$\phi = 0$: 知識の蓄積が新たな知識の生産と無関係.

以下では, $\phi > 0$を仮定する.

——Romer モデル($\phi = 1$, $n = 0$)——

Romer, P. M. (1990) "Endogenous Technological Change," *Journal of Political Economy* 98 (5), pp. 71–102.

総労働のうちR&D部門で雇用される割合をσとする.

$$L_A = \sigma L, \quad L_Y = (1 - \sigma)L, \quad 0 < \sigma < 1. \tag{5}$$

均斉成長経路(BGP)では, 資本ストックの成長率が一定となる. まず,

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta. \tag{6}$$

これが一定となるためには, Y と K が同率で成長する必要がある.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}_Y}{L_Y}\right) = \frac{\dot{K}}{K}. \tag{7}$$

以上より,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \gamma\sigma L. \tag{8}$$

BGP における 1 人当たり所得成長率 ($g_y = \dot{y}/y$).

$$g_y = \gamma\sigma L. \tag{9}$$

これより,

$$\sigma \uparrow \Longrightarrow g_y \uparrow,$$
$$L \uparrow \Longrightarrow g_y \uparrow .$$

規模効果 (Scale Effects) が存在する.

——Romerモデルの安定性——

ソロー・モデルの定常状態は安定であった. Romerモデルでどうだろうか. 均斉成長経路では, 資本ストックと知識の成長率が等しくなるので, $k = K/A$という新しい変数を導入し, kの動学方程式を分析することを考える. 定常状態では, KとAが同率で成長するので, kが一定となる.

この新しい変数kの変化率を計算すると, 次のようになる.

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} = s\frac{Y}{K} - \delta - \gamma\sigma L \tag{10}$$

$$= s\left[\frac{A(1-\sigma)L}{K}\right]^{1-\alpha} - (\gamma\sigma L + \delta) \tag{11}$$

$$= s[(1-\sigma)L]^{1-\alpha}k^{\alpha-1} - (\gamma\sigma L + \delta). \tag{12}$$

これより,

$$\dot{k} = s[(1-\sigma)L]^{1-\alpha}k^{\alpha} - (\gamma\sigma L + \delta)k \tag{13}$$

というkに関する微分方程式が得られる. Romerモデルでは, Lが一定なので, 右辺において時間とともに変動する変数はkだけである. したがって, 新古典派成長モデルのときと同様に, グラフを描いて分析することができる.

定常状態は$\dot{k} = 0$となる状態であり, そのときのkの値は次式で与えられる.

$$k^* = (1-\sigma)L\left(\frac{s}{\gamma\sigma L + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{14}$$

この値は正であり, 確かに定常状態は存在する.

定常状態が安定であるかどうかは, 次式の符号が確かめることでわかる.

$$\left.\frac{d\dot{k}}{dk}\right|_{k=k^*} = k^*[s(\alpha - 1)[(1-\sigma)L]^{1-\alpha}(k^*)^{\alpha-2}]. \tag{15}$$

$0 < \alpha < 1$ であることから, この微係数の符号は負である. したがって, 定常状態は局所的に安定である.

——Jonesモデル($0 < \phi < 1$, $n > 0$)——

Jones, C. I. (1995a) "R&D-Based Models of Economic Growth," *Journal of Political Economy* 103, pp. 759–784.

Jones, C. I. (1995b) "Time Series Tests of Endogenous Growth Models," *Quarterly Journal of Economics* 110, pp. 495–525.

1. Romerモデルでは, R&Dに従事する人数が一定であっても, 1人当たり所得は持続的に成長する.

2. 現実には, R&Dに従事する人数は増えている．しかし, 成長率は急激に上昇していない.

3. R&Dの定式化が不適切では?

知識の成長率.

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma\sigma L A^{\phi-1}. \tag{16}$$

これが一定となることから,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{1-\phi}. \tag{17}$$

BGPにおけるYとKの成長率.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = n + \frac{n}{1-\phi}. \tag{18}$$

BGPにおける1人当たり所得成長率.

$$g_y = \frac{n}{1-\phi}. \tag{19}$$

これより,

$$n \uparrow \Longrightarrow g_y \uparrow . \tag{20}$$

規模効果が取り除かれる.

Jonesモデルの安定性

Solowモデルの定常状態は安定であった. Jonesモデルではどうか?

Solowモデルで効率労働単位の資本ストックを導入したことを思い出そう.

Jonesモデルでも, Solowモデルにおける効率労働単位の資本ストックのように, 定常状態において一定となるような変数を導入すれば, 安定性を分析できる.

次のような新しい状態変数を導入する.

$$a = \frac{A}{L^{\frac{1}{1-\phi}}}, \quad k = \frac{K}{L^{\frac{2-\phi}{1-\phi}}}. \tag{21}$$

a と k を微分することで, 以下のような a と k に関する微分方程式を得る.

$$\dot{a} = a\left(\gamma\sigma a^{\phi-1} - \frac{n}{1-\phi}\right), \tag{22}$$

$$\dot{k} = k\left[s(1-\sigma)^{1-\alpha}a^{1-\alpha}k^{\alpha-1} - \delta - \frac{2-\phi}{1-\phi}n\right]. \tag{23}$$

ここで, この連立微分方程式に対応するヤコビ行列 $\mathbf{J}$ を考える.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

ヤコビ行列の各要素は以下のようになっている.

$$J_{11} = \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} = -a[(1-\phi)\gamma\sigma a^{\phi-2}] < 0, \tag{25}$$

$$J_{12} = \frac{\partial \dot{a}}{\partial k} = 0, \tag{26}$$

$$J_{21} = \frac{\partial \dot{k}}{\partial a} = k[s(1-\alpha)(1-\sigma)^{1-\alpha}a^{-\sigma}k^{\alpha-1}] > 0, \tag{27}$$

$$J_{22} = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = -k[s(1-\alpha)(1-\sigma)^{1-\alpha}a^{1-\alpha}k^{\alpha-2}] < 0. \tag{28}$$

これより，符号は以下のようになる.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} - & 0 \\ + & - \end{pmatrix}. \tag{29}$$

連立微分方程式の定常状態が安定となるための必要十分条件は, ヤコビ行列の対角要素の和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{J}$ が負となり, かつ行列式 $\det\mathbf{J}$ が正となることである. 実際にこれらを計算してみると, $\mathrm{tr}\,\mathbf{J} < 0$ かつ $\det\mathbf{J} > 0$ が成立していることが確認できる. つまり, Jones モデルの定常状態は安定である.

位相図でも安定となることを確認してみよう. 定常状態は, $\dot{a} = 0$ かつ $\dot{k} = 0$ となる状態である. これを解くと, 定常均衡値が得られる.

$$a^* = \left[\frac{\gamma\sigma(1-\phi)}{n}\right]^{\frac{1}{1-\phi}}, \tag{30}$$

$$k^* = (1-\sigma)s^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\gamma\sigma(1-\phi)}{n}\right]^{\frac{1}{1-\phi}}. \tag{31}$$

位相図を描くと, やはり定常状態は安定となっていることが確認できる.

Romer モデルと **Jones** モデルに対する評価

- Romer モデルは一国規模のモデルというよりは, 地球規模のモデルと解釈すべきではないか (Kremer, 1993).
- データは, Jones モデルよりも Romer モデルを支持している (Abdih and Joutz, 2006; Madsen, 2008).
- TFP 成長率と人口成長率の間には負の相関がある (Strulik, Prettner, and Prskawetz, 2013).